

CAPÍTULO III

El trazado en planta.

○ En planta, el trazado de un camino está compuesto de alineaciones rectas y curvas; la alineación recta, permite un movimiento uniforme del vehículo, proporciona visibilidad para que el tráfico se desarrolle en adecuadas condiciones de seguridad y con el mínimo consumo de combustible. La necesidad de que — cumpliendo las condiciones de máxima pendiente — el trazado se desarrolle sin movimiento de tierra excesivo, de salvar los obstáculos naturales que el terreno presenta y de unir los puntos que el camino ha de servir, obliga a intercalar curvas entre las alineaciones rectas, que serán, en mayor o menor número, según la configuración del terreno.

En la práctica, por tanto, el trazado en planta de un camino, se compondrá de rectas y curvas; pero el ingeniero, al proyectar, deberá procurar que los obstáculos que tiene que introducir, las curvas, produzcan las menores molestias e inconvenientes en el tráfico.

39. Alteraciones en la marcha y peligros de las curvas. — Las alteraciones que las curvas producen en el tráfico son:

a) Aparición de la fuerza centrífuga, que puede ser causa de accidentes, y que obliga a los conductores a reducir la velocidad a la entrada de las curvas que no estén bien proyectadas.

b) Falta de visibilidad, que hace posible el choque con un vehículo que viene en dirección contraria.

c) Aumento del espacio preciso por vía de tráfico, por ser mayor el que ocupa el vehículo en curva, que en recta.

Estos inconvenientes no tenían importancia en los antiguos caminos, pues el tráfico era lento y relativamente reducido en número; pero en las modernas vías, con tráfico intensísimo y con velocidades que alcanzan normalmente cifras superiores a los 100 Km./hora, las condicio-

nes del trazado en planta son fundamentales, si queremos que las curvas no disminuyan, ni las condiciones de seguridad, ni la economía del transporte.

40. Proyecto de una curva. Velocidad específica.— Salvar los obstáculos *a)*, *b)* y *c)*, que hemos visto producen las curvas, se logra, en primer término y como regla general, proyectándolas con el mayor radio posible; los reglamentos de caminos ordinarios y ferrocarriles, marcan como preceptivos radios mínimos, por debajo de los cuales no se debe bajar, en cada categoría de camino; nuestra Instrucción de carreteras fija los radios mínimos de 100, 60 y 40 metros para carreteras nacionales, comarcales y locales; prescribir radios menores, según va disminuyendo la categoría de la vía, es racional, pues, según ésta sea menos importante, menor será la *velocidad específica* para la cual se establecen las condiciones de trazado en planta, del camino; la velocidad específica de la carretera que, como luego veremos, influye en la fijación de sus características en planta y alzado, será el punto de partida de todo estudio; las velocidades específicas, de las cuales parte nuestra Instrucción, son: 60, 50 y 40 kilómetros hora; a ellas se refieren todos los datos que establecen como preceptivos; debe el lector tener muy en cuenta que, sólo para estas velocidades específicas, son correctos los datos que la Instrucción señala; si la vía se proyecta para velocidades más altas, será preciso determinar directamente las condiciones que el trazado ha de cumplir; las velocidades que la Instrucción fija son, a nuestro juicio, muy reducidas para un camino moderno; caminos de carácter nacional, en terreno no excepcionalmente accidentado, deben proyectarse para velocidades superiores a 100 kilómetros/hora. Por otra parte, fijar una velocidad específica única para una categoría de caminos, no es lógico, especialmente en un país como el nuestro, donde la configuración del terreno varía mucho, según las distintas zonas; un racional sentido de economía puede aconsejar la reducción de velocidad específica tipo de un camino, al pasar por zonas montañosas; estas variaciones no deben ser frecuentes y han de anunciarse al tráfico en forma visible; la tendencia moderna es proyectar los caminos con velocidades cada día más elevadas; las autoestradas alemanas están calculadas para velocidades de 160 Km./hora.

Al proyectar las curvas de un trazado habrá que estudiar:

1.º La combinación de los radios mínimos y peraltes convenientes, que den, para la velocidad de cálculo, la precisa seguridad al tráfico, evitando los peligros de despiste y vuelco.

2.º El paso de la alineación recta a la curva, intercalando curvas de transición, que eviten la brusca aparición de la fuerza centrífuga.

3.º El sobreebanco en la zona de la curva, que permita conservar la misma capacidad de tráfico que en la alineación recta.

4.º La debida visibilidad, asegurada por el radio mínimo de la curva o por los despejes necesarios.

Proyectar una curva, no es problema determinado, que tenga una solución única; como en la mayoría de los de ingeniería, en la elección de la solución más conveniente, el proyectista ha de hacer entrar en juego el cumplimiento de las distintas condiciones que vamos a examinar — unas, independientes entre sí, y otras, conexas — y el coste de las mismas; la naturaleza del terreno, y, por tanto, el importe del movimiento de tierras, suele influir fundamentalmente en la solución a elegir.

41. Peligro de estabilidad. Peralte. — Cuando el vehículo marcha en recta, hemos visto que las fuerzas que actúan sobre él son el

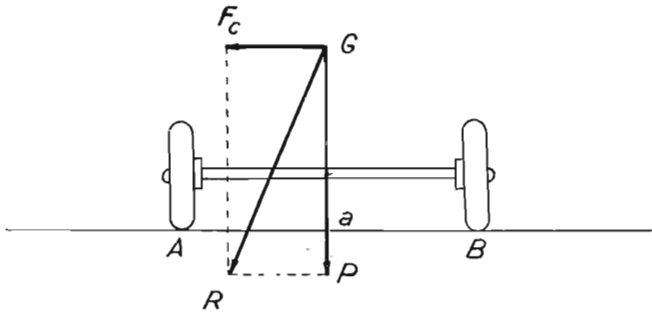


Figura 34.

peso, P , del mismo y la reacción que el rozamiento por la rotación de las ruedas produce en el terreno, y que es causa de que el vehículo avance; ambas fuerzas están situadas en el plano de marcha.

Al entrar en una curva se presenta una nueva fuerza, la fuerza centrífuga, que origina dos peligros para la estabilidad del vehículo en marcha: el peligro de deslizamiento transversal, si el coeficiente de rozamiento no es suficiente para que $\mu_t \times P > F_c$, y el peligro del vuelco si $F_c \times a > P \times a$ (fig. 34); ambos peligros se evitan peraltando la curva, dando al plano AB , de la calzada, una inclinación α ; vamos a ver cuáles son las condiciones de equilibrio del vehículo en camino horizontal y con peralte, cuando la curva tiene un radio R , y V es la velocidad del vehículo.

42. Peligro de deslizamiento (fig. 35).

<i>Fuerza solicitante.</i> — Componente paralela al plano de la calzada de la fuerza centrífuga	$F \cos \alpha$
<i>Fuerzas resistentes.</i> — Componente paralela al plano de la calzada del peso del vehículo	$P \sin \alpha$
Reacción del rozamiento transversal por rotación....	$F \sin \alpha \times \mu_t + P \cos \alpha \times \mu_t$

La condición de equilibrio será:

$$F \cos \alpha = P \sin \alpha + \mu_t (F \sin \alpha + P \cos \alpha); \quad [1]$$

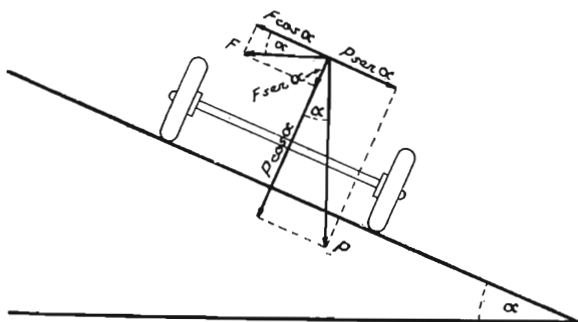


Figura 35.

la fuerza centrífuga vale $F = \frac{Mv^2}{R} = \frac{P}{g} \times \frac{V^2}{R}$; si la velocidad, V , como es corriente, la expresamos en kilómetros por hora, la fuerza centrífuga valdrá:

$$F = \frac{P}{g} \frac{V^2}{3,6^2 R} = \frac{P}{127,14} \times \frac{V^2}{R};$$

sustituyendo este valor en la [1], resulta:

$$\frac{P}{127,14} \times \frac{V^2}{R} \cos \alpha = P \sin \alpha + \left(P \cos \alpha + \frac{P}{127,14} \times \frac{V^2}{R} \sin \alpha \right) \mu_t;$$

de donde se deduce:

$$V = \sqrt{\frac{127,14 R (\operatorname{tg} \alpha + \mu_t)}{1 - \mu_t \operatorname{tg} \alpha}} = 11,27 \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu_t}{1 - \mu_t \operatorname{tg} \alpha}} \times R, \quad [2]$$

que da la máxima velocidad admisible en una curva de radio R , con una inclinación transversal, α , del plano del camino con la horizontal; de esta misma relación se puede deducir el radio mínimo, R , preciso para una velocidad específica, V , con una máxima inclinación transversal, α del plano del camino.

Si la carretera hubiera sido horizontal, $\alpha = 0$ y $\text{tg } \alpha = 0$, y por tanto la máxima velocidad admisible sería $V = \sqrt{127,14 R \mu_t}$.

✕ **43. Peligro de vuelco.** — Supongamos que el vehículo entra en una curva horizontal (fig. 36). Actuará sobre él su peso, P , y la fuerza

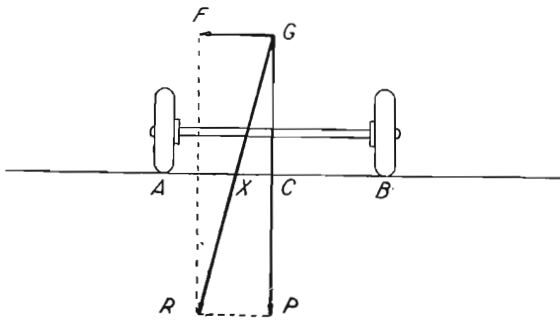


Figura 36.

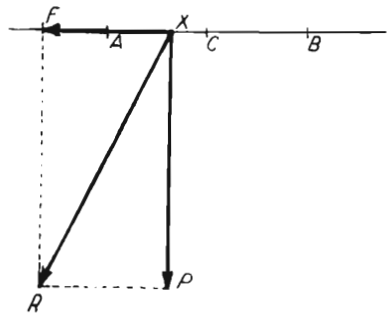


Figura 37.

centrífuga, F , ambos aplicados a su centro de gravedad, G ; tendrán una resultante, GR , que cortará al plano del camino en un punto, X ; el peso, P , se distribuirá sobre las dos ruedas en la proporción $XB : XA$, y por otra parte tendremos:

$$\frac{P}{F} = \frac{GC}{XC};$$

si F aumenta (aumento de velocidad del vehículo o disminución del radio de la curva), puede llegar un momento en que X coincida con A ; entonces todo el peso actúa sobre esta rueda y el vehículo tiende a volcar. Si la resultante GR la trasladamos y descomponemos en X (fig. 37), tendremos dos fuerzas, la FX y la XP ; la primera tiende a hacer deslizar el vehículo en sentido transversal al de marcha; ha de absorberse por el rozamiento transversal por rotación, en los caminos ordinarios, o por la resistencia del carril contra la pestaña de la rueda, en los ferrocarriles; la fuerza, XP , se absorberá por la resistencia del terreno, descompuesta en dos fuerzas

parciales en A y B en la proporción señalada. Para que no exista posibilidad de volcar es preciso que:

$$\frac{F}{P} = v_t < \frac{CA}{CG};$$

la relación $\frac{F}{P}$ la denomina ROYAL-DAWSON (*Elements of Curve Design*) "relación centrífuga".

Si existe peralte, habrá que establecer la condición de equilibrio entre los momentos de la fuerza centrífuga y el peso, con relación al punto

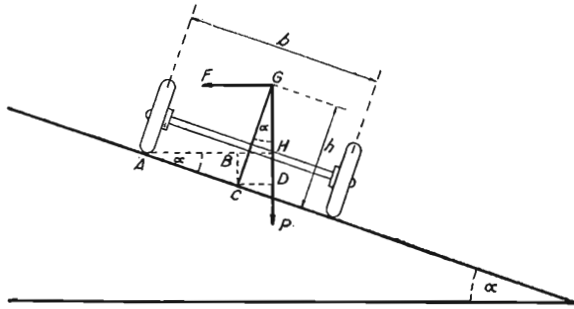


Figura 38.

de apoyo, A , de la rueda exterior; esta condición con las notaciones de la figura 38, da:

$$P(AB + CD) = F(GD - HD);$$

ahora bien, tenemos:

$$AB = \frac{b}{2} \cos \alpha; \quad CD = h \sin \alpha; \quad GD = h \cos \alpha; \quad HD = BC = \frac{b}{2} \sin \alpha;$$

sustituyendo estos valores y el de F , hallado antes, tendremos:

$$P \left(\frac{b}{2} \cos \alpha + h \sin \alpha \right) = \frac{P}{127,14} \times \frac{V^2}{R} \left(h \cos \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha \right);$$

de donde se deduce:

$$V = 11,27 \sqrt{\frac{\frac{b}{2} + h \operatorname{tg} \alpha}{h - \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha}} \times R;$$

para las dimensiones normales de los vehículos $b = 1,40$, $h = 0,80$, tendremos:

$$V = 11,27 \sqrt{\frac{0,70 + 0,80 \operatorname{tg} \alpha}{0,80 - 0,70 \operatorname{tg} \alpha}} \times R. \quad [3]$$

Del examen de las fórmulas [2] y [3], se deduce:

1.º Para un radio y un peralte determinado, la consideración de deslizamiento limita más la velocidad que la condición de vuelco; conviene, por tanto, aumentar el coeficiente μ_t en la zona de la curva, para que sea posible una velocidad mayor.

2.º Para un radio determinado, el aumento de peralte, aumenta en muy pequeña proporción la velocidad límite admisible. Por ejemplo: aplicando las fórmulas para $\mu_t = 0,35$, $R = 50$ m. y dos peraltes de 8 por 100 y 14 por 100, las velocidades límites admisibles son 53 y 57 kilómetros a la hora. No es conveniente, por tanto, aumentar exageradamente los peraltes, pues la ventaja que se obtiene es muy pequeña, y aparte del aumento del valor de la obra, se perjudica el tránsito en general, ya que los vehículos que marchan a velocidad menor de la de cálculo, tienden a ir por la parte baja del peralte, haciendo trabajar excesivamente una zona del camino, y peligroso el tránsito de la curva, pues un sentido de circulación tiende a marchar fuera de su mano. Estos inconvenientes se hacen especialmente notables para el tránsito de tracción animal, por su pequeña velocidad, y al mismo tiempo por la posibilidad de vuelco, por llevar, normalmente, la carga con centro de gravedad alto.

Nuestra Instrucción de Carreteras admite un peralte máximo del 12 por 100, y supone un coeficiente de adherencia mínimo de 0,35; partiendo de estos datos, calcula las distintas combinaciones de radios y velocidades, según se considere un coeficiente de rozamiento nulo, 0,35, 0,50 ó 0,70. A nuestro entender, el peralte máximo del 12 por 100 es excesivo, por las razones apuntadas. El acondicionamiento de los firmes, las curvas de transición, cuando sean precisas, y el despeje de las mismas para lograr la debida visibilidad, dan a la circulación seguridades mucho mayores que un peralte fuerte, con indudables ventajas para el conjunto del tráfico.

En las Instrucciones para la construcción de las autoestradas alemanas, el peralte normal máximo es el 8 por 100, pudiéndose llegar excepcionalmente a 10 por 100.

Como resultado de las experiencias realizadas en la Universidad de Iowa, se propusieron los siguientes peraltes (*Boletín* núm. 120 de la Estación de Ingenieros experimental de Iowa. B. OLIVER: "La curva de transición en carreteras").

a) En caminos de primera categoría, 2 por 100 en curvas de radio de 1.750 metros, con aumento proporcional hasta el 10 por 100 con radio de 350 metros.

b) En caminos de segunda categoría, 1 por 100 en curvas con radio de 1.750 metros y aumento proporcional hasta el 10 por 100 con radio de 175 metros.

c) En caminos de tercera categoría, 0,75 por 100 en curvas de 1.750 metros, con aumento proporcional hasta el 10 por 100 con radio de 120 metros.

El procedimiento expuesto, sistema clásico de cálculo, no es exacto; no se tienen en cuenta, como esfuerzos que actúan sobre el vehículo, más que el peso y la reacción de la fuerza centrífuga debida al coeficiente de rozamiento transversal; el vehículo se supone rígido, prescindiendo del efecto de las ballestas y de la variación de forma de los neumáticos, que originan una distribución desigual del peso del vehículo; no se tienen en cuenta las resistencias al movimiento, de valor no despreciable para velocidades específicas elevadas, superiores a 100 Km./hora, a que se calculan los caminos modernos. El problema ha sido afrontado por DERRON ("Zur Frage des Mindelshalbmessers von Strassenkurven", en *Strasse und Verkehr*, núm. 17, del año 1939) y ha sido analizado y comentado extensamente por el profesor ARRIANO ("Considerazioni nelle curve Stradali", *Ricerca e Studi*, 1941); el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio del vehículo lleva a obtener, como valor del radio mínimo, para que no exista peligro de deslizamiento:

$$R_{\min} = \frac{\frac{V^2}{g} \left[1 + \mu_t \left(\frac{2h}{b} - \operatorname{tg} \alpha \right) \right]}{\mu_t \left(1 + \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \alpha \right) + \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{M}{P} \frac{b^2}{2p \cos \alpha}, \quad [1]$$

en la cual:

M es el esfuerzo motor.

P es el peso del vehículo.

p , la distancia entre los ejes anterior y posterior.

h , la altura del centro de gravedad.

b , el ancho entre ruedas.

α , el ángulo del peralte.

V , la velocidad, expresada en metros por segundo.

Para valores normales de los vehículos, el término $\frac{M}{P} \frac{b^2}{2p \cos \alpha}$ es

despreciable en relación con el resto del numerador, y por ello DERRON recomienda emplear la fórmula simplificada

$$R_{\min} = \frac{\frac{V^2}{g} \left[1 + \mu_t \left(\frac{2h}{b} - \operatorname{tg} \alpha \right) \right]}{\mu_t \left(1 + \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \alpha \right) + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Los radios mínimos a que se llega por la aplicación de esta fórmula son mayores que los obtenidos por el procedimiento clásico, especialmente para velocidades específicas pequeñas y valores pequeños de $\operatorname{tg} \alpha$.

Para el peligro de vuelco, llega a la fórmula

$$R_{\min} = \frac{V^2}{g} \times \frac{4 \frac{h}{b} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + 4 \frac{h}{b} \operatorname{tg} \alpha}, \quad [2]$$

que también impone radios mínimos mayores que la fórmula clásica, especialmente para pequeños valores de $\operatorname{tg} \alpha$.

La existencia de un viento horizontal obliga a una rectificación del radio calculado, que en los trabajos citados se determina por la fórmula

$$\frac{1}{R_{cv}} = \frac{1}{R_{sv}} \mp \frac{g}{P} \frac{\varphi F V_v^2}{V^2}, \quad [3]$$

en la cual:

R_{cv} es el radio mínimo preciso con viento.

R_{sv} " " " " sin viento, o sea la expresión [1].

F la superficie del vehículo expuesta al viento (superficie lateral).

V_v la velocidad del viento.

φ el coeficiente de forma del vehículo en el sentido en que el viento actúa; es decir, transversalmente; normalmente, puede tomarse 0,20/0,30.

En la fórmula anterior se tomará el signo menos cuando el viento actúa hacia el exterior de la curva, es decir, sumando su acción a la fuerza centrífuga, que es cuando interesa, pues el viento hacia el interior de la curva no debe tenerse en cuenta, por ser favorable al equilibrio. Como es lógico, resulta que el peligro de la acción del viento es mayor cuanto menor es la velocidad del vehículo; se disminuye el peligro, aumentando el peralte y el coeficiente de rozamiento del firme.

El planteamiento matemático del problema, a nuestro juicio, sirve

únicamente como orientación; en modo alguno pueden tomarse como exactos los valores de los radios mínimos obtenidos; no es exacta la hipótesis de la cual se parte, de que el esfuerzo del viento se aplica en el centro de gravedad del vehículo; intervienen además factores muy complejos: deformabilidad de los neumáticos, resistencia al movimiento al desviarse el plano de las ruedas del de marcha, etc. Todo ello aconseja acometer el problema experimentalmente, en modelo reducido; así se han iniciado los estudios en el Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren, de Stoccarda, y ARRIANO en el Instituto Sperimentale Stradale, en Milán, sin haber llegado todavía a resultados definitivos.

Ejemplo: Camino con firme de hormigón hidráulico (coeficiente de deslizamiento transversal por rotación $\mu_t = 0,60$) y velocidad específica de 100 Km./hora.

Peligro de deslizamiento: el radio mínimo se obtendrá despejando R de la fórmula

$$V^2 = \frac{127,14 R (\operatorname{tg} \alpha + \mu_t)}{1 - \mu_t \times \operatorname{tg} \alpha};$$

para los peraltes desde 0 al 8 por 100, los valores mínimos de R , son:

$\operatorname{tg} \alpha = 0$	$R = 131,00$ metros.
” $= 0,02$	” $= 125,33$ ”
” $= 0,04$	” $= 120,07$ ”
” $= 0,06$	” $= 114,88$ ”
” $= 0,08$	” $= 110,12$ ”

Se puede comprobar, por los resultados anteriores, la pequeña influencia que tiene el peralte en el valor de radio mínimo necesario.

Peligro de vuelco: el radio mínimo se obtiene despejando R en la fórmula

$$V = 11,27 \sqrt{\frac{\frac{b}{2} + h \operatorname{tg} \alpha}{h - \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha}},$$

y para un ancho de camión $b = 2,20$ y una altura del centro de gravedad $h = 1,50$, los radios mínimos para los mismos valores del peralte calculados anteriormente, serán:

$\operatorname{tg} \alpha = 0$	$R = 107,27$ metros.
” $= 0,02$	” $= 102,72$ ”
” $= 0,04$	” $= 98,70$ ”
” $= 0,06$	” $= 94,77$ ”
” $= 0,08$	” $= 90,99$ ”

Como en el caso del peligro de deslizamiento, el peralte influye poco en la dimensión del radio mínimo; los radios precisos por razón de deslizamiento son mayores que los que impone el peligro de vuelco, aun tratándose de un vehículo de centro de gravedad relativamente alto; la aplicación de la fórmula de DERRON, simplificada, da como radios mínimos precisos por el peligro de deslizamiento, los siguientes:

$\operatorname{tg} \alpha = 0$	$R = 238,19$ metros.
" = 0,02	" = 223,22 "
" = 0,06	" = 197,58 "
" = 0,08	" = 186,77 "

bastante mayores, según dijimos, que los obtenidos por el procedimiento clásico; la influencia del peralte es mayor asimismo que en el procedimiento clásico.

④ 44. **Curvas de transición.** — Al pasar de una alineación recta a una curva, aparece bruscamente la fuerza centrífuga, que tiende a desviar

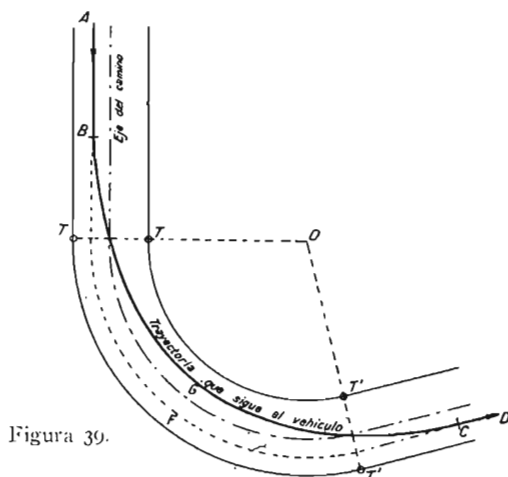


Figura 39.

al vehículo de la trayectoria que debe recorrer; este hecho representa una incomodidad y un peligro. En realidad, lo que ocurre es que, para evitar ambos, instintivamente, el conductor no recorre la traza que corresponde a su línea de circulación, sino otra distinta (fig. 39), en la cual pasa de un modo paulatino, del radio infinito de la alineación recta, al finito de la curva circular de acuerdo; la mancha de aceite que se observa en las curvas de los caminos marca la trayectoria que siguen los vehículos, apartándose de la línea circular; con ello se evita la incomodidad que el cambio brusco de condiciones de equilibrio del vehículo produce, pero, al salir

de su línea de circulación, aparece el peligro de choque con un vehículo que viene en dirección contraria; el problema puede resolverse pasando de la alineación recta a la curva circular; por intermedio de una *curva de transición* que, con un radio de curvatura infinito en el punto de tangencia con la recta, vaya disminuyendo éste hasta el radio finito de la curva circular de acuerdo; el problema tiene una solución matemática exacta empleando como curvas de transición radioides, curvas en las cuales el radio de curvatura es inversamente proporcional al desarrollo de la curva, al radio vector correspondiente o a la abscisa; estas curvas son, respectivamente, la clotoide, la lemniscata de BERNOULLI y la curva elástica; las curvas de transición hace muchos años que se utilizan en ferrocarriles; en los caminos ordinarios, el empleo de las altas velocidades específicas de 100 y hasta de 200 K.m./hora, las han hecho imprescindibles. La curva de transición será tanto más necesaria cuanto menor sea el radio de la curva circular, puesto que mayor será el valor de la fuerza centrífuga, que bruscamente aparece, si el vehículo recorre exactamente su línea de circulación; adaptar el conductor su vehículo a la curva de transición representará, si la curva circular es de pequeño radio, una desviación importante para la seguridad del tráfico; si la desviación de la curva circular es pequeña, por ser reducida la fuerza centrífuga — curva circular de acuerdo de radio grande —, no tendrá importancia para la seguridad, pues, como más adelante veremos, las secciones transversales de los caminos, siempre permiten variaciones de unos centímetros del eje de cada vía de circulación.

La comodidad de la circulación exige, que el incremento de la fuerza centrífuga no pase de un valor determinado, para que no sea sensible al conductor del vehículo; ello obliga a que el paso de radio de curvatura infinito de la alineación recta, al finito de la curva circular, o sea la longitud de la transición, tenga un valor mínimo; primitivamente la longitud de la curva de transición se calculaba por fórmulas empíricas; hoy se calcula por procedimientos racionales; el de SHORTT, que a continuación se expone, es el más empleado:

Sea V la velocidad del vehículo, y r , el radio de la curva; la fuerza centrífuga a la cual hemos de llegar para una masa unidad, es:

$$F_n = \frac{V^2}{r}.$$

Si l es la longitud de la curva de transición, el tiempo que el vehículo tardará en recorrerla será:

$$t = \frac{l}{V}.$$

Al valor definitivo de F_n se ha de llegar, partiendo de cero, en un tiempo t ; el incremento por unidad de tiempo valdrá:

$$\frac{F_n}{t} = \frac{\frac{V^2}{r}}{\frac{l}{\Psi}} = \frac{V^3}{lr};$$

es decir, que el incremento de fuerza centrífuga por unidad de tiempo o aceleración, es proporcional al cubo de la velocidad, e inversamente proporcional al radio de la curva. Para una velocidad específica, V , y un radio determinado, R , habrá una longitud, L , de curva de transición que evite pase la aceleración centrífuga por unidad de tiempo $\frac{F_n}{t} = J$ del valor prácticamente aceptable; esta longitud vendrá dada por

$$J = \frac{V^3}{LR};$$

de donde:

$$L = \frac{V^3}{JR}.$$

SHORTT propone, para ferrocarriles, un valor de J de 0,305 m. (un pie inglés) por segundo y segundo, y en este caso la longitud de la transición natural será, en metros para las longitudes, segundos para los tiempos y kilómetros/hora para las velocidades

$$L = 0,0703 \frac{V^3}{R}$$

R. A. MOYER, en el *Boletín* núm. 120 de la Estación de Ingeniería experimental de Iowa, propone que el valor de J sea 0,61, e incluso 0,915 (2 y 3 pies ingleses).

La "relación centrífuga" de ROYAL DAWSON

$$C = \frac{F}{P} = \frac{\frac{P}{g} \frac{V^2}{R}}{P} = \frac{V^2}{gR}$$

cuando las unidades son:

- para las fuerzas, el kilogramo;
- " " velocidades, el kilómetro-hora;
- " " longitudes, el metro por segundo y segundo;

vale:

$$C = \frac{F}{P} = \frac{V^2}{127 \times R};$$

cuando la relación centrífuga vale 0,25,

$$V^2 = 31,75 R \times 32 R,$$

y la longitud de transición:

$$L = 0,0703 \frac{V^3}{R} = 0,0703 \frac{32 R \times \sqrt{32 R}}{R} = 0,0703 \times 32 \times \sqrt{32 \times R} = 12,7257 \sqrt{R}.$$

45. Clotoide. — En ella el radio de curvatura es inversamente proporcional a la longitud de la curva, o sea:

$$R \times l = \text{constante}; \quad [1]$$

se la conoce también por el nombre de “espiral de CORNÚ”, porque fué este autor el que la estudió con motivo de la matemática de la luz; el nombre de clotoide se debe al matemático italiano CÉSARO. Corrientemente se la denomina “espiral de transición”, o simplemente espiral.

Su ecuación en coordenadas cartesianas es:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt \\ y &= a \sqrt{\pi} \int_0^t \text{sen} \frac{\pi t^2}{2} dt \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

en las cuales t es un parámetro.

Otra forma de ecuación característica es:

$$L = m \sqrt{\varphi}, \quad [3]$$

en la cual, m es una constante, y φ es el ángulo que la tangente en un punto forma con el eje polar; diferenciando esta ecuación con relación a φ , se tiene:

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{1}{2} m \varphi^{\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \frac{m}{2\sqrt{\varphi}};$$

pero $\frac{dL}{d\varphi} = R$; luego $R = \frac{m}{2\sqrt{\varphi}}$; $m = 2 R \sqrt{\varphi}$

$$m^2 = 2 R m \sqrt{\varphi} = 2 R L; \quad m = \sqrt{2 R L};$$

en definitiva, idéntica a la [1]; sustituyendo este valor en la [3]:

$$L = \sqrt{2RL} \sqrt{\varphi}, \text{ o sea } L = 2R\varphi \text{ ó } \varphi = \frac{L}{2R}.$$

El valor de las coordenadas de un punto, x e y , será:

$$dx = dL \cos \varphi = \frac{m \cos \varphi d\varphi}{2\sqrt{\varphi}};$$

desarrollando en serie $\cos \varphi$, e integrando, tendremos:

$$x = m \sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{\varphi^2}{5 \times 2!} + \frac{\varphi^4}{9 \times 4!} - \frac{\varphi^6}{13 \times 6!} + \dots \right) = m \sqrt{\varphi} \quad [5]$$

para ángulos pequeños.

$$dy = dL \operatorname{sen} \varphi = \frac{m \operatorname{sen} \varphi d\varphi}{2\sqrt{\varphi}},$$

desarrollando en serie φ e integrando,

$$y = m \sqrt{\varphi} \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\varphi^3}{7 \times 3!} + \frac{\varphi^5}{11 \times 5!} - \frac{\varphi^7}{15 \times 7!} + \dots \right) = \frac{m}{3} \varphi^{\frac{3}{2}} \quad [6]$$

para ángulos muy pequeños; eliminando $\sqrt{\varphi}$ entre las [5] y [6], tendremos:

$$y = \frac{x^3}{3m^2} = \frac{x^3}{6RL};$$

para ángulos pequeños, o bien eliminando m entre las mismas:

$$y = x \frac{\varphi}{3},$$

siendo

$$\varphi = \frac{x^2}{m^2}$$

para ángulos pequeños.

Además, tendremos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi^3}{105} + \frac{\varphi^5}{5997} + \frac{\varphi^7}{198700} = \frac{\varphi}{3} \pm Q,$$

siendo Q una cantidad muy pequeña, despreciable para ángulos pequeños,

$$\alpha = \frac{\varphi}{3} - \frac{8\varphi^3}{2835} - \frac{32\varphi^5}{467775} - \dots = \frac{\varphi}{3} - N_s,$$

en la cual N_s es una cantidad despreciable para ángulos pequeños; de esta ecuación se deduce:

$$\varphi = 3(\alpha + N_s) = 3\alpha,$$

aproximadamente para pequeños ángulos, y como antes hemos visto $L = 2R\varphi$, tendremos, sustituyendo φ por su valor:

$$L = 6R(\alpha + N_s) = 6R\alpha,$$

aproximadamente para ángulos pequeños.

Los valores de N_s vienen dados en la tabla I.

TABLA I
Valores de N_L y N_s para la Lemniscata y Espiral.

$9.55 = \frac{180}{6.27}$

LEMNISCATA $\frac{L}{R} 9.55 = a - N_L$				ESPIRAL $\frac{L}{R} 9.55 = a + N_s = \frac{\varphi}{3}$			
a	N_L	a	N_L	a	N_s	a	N_s
1°	.0000	24°	1.1230	1°	.0000	24°	.3210
2°	.0002	25°	1.2692	2°	.0002	25°	.3622
3°	.0023	26°	1.4278	3°	.0006	26°	.4099
4°	.0052	27°	1.5989	4°	.0014	27°	.4615
5°	.0101	28°	1.7833	5°	.0028	28°	.5175
6°	.0169	29°	1.9811	6°	.0049	29°	.5777
7°	.0275	30°	2.1942	7°	.0076	30°	.6383
8°	.0410	31°	2.4207	8°	.0114	31°	.7095
9°	.0583	32°	2.6633	9°	.0162	32°	.7860
10°	.0804	33°	2.9213	10°	.0223	33°	.8680
11°	.1073	34°	3.1956	11°	.0299	34°	.9551
12°	.1399	35°	3.4869	12°	.0388	35°	1.0393
13°	.1782	36°	3.7955	13°	.0495	36°	1.1385
14°	.2222	37°	4.1222	14°	.0620	37°	1.2515
15°	.2739	38°	4.4614	15°	.0762	38°	1.3624
16°	.3323	39°	4.8310	16°	.0930	39°	1.4798
17°	.3983	40°	5.2160	17°	.1114	40°	1.6113
18°	.4738	41°	5.6191	18°	.1329	41°	1.7465
19°	.5570	42°	6.0452	19°	.1568	42°	1.8970
20°	.6498	43°	6.4903	20°	.1837	43°	2.0572
21°	.7521	44°	6.9594	21°	.2132	44°	2.2109
22°	.8649	45°	7.4513	22°	.2459	45°	2.3623
23°	.9882			23°	.2818		

Lemniscata $\varphi = 3a$.

$\beta = \varphi - a = 3a - a = 2a$.

Espiral $\varphi = 3(a + N_s)$

$\beta = \varphi - a = 3(a + N_s) - a$
 $= 2a + 3N_s$.

46. **Lemniscata.** — La lemniscata, u óvalo de CASSINI, es el lugar de los puntos en los cuales el producto de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante; su ecuación en coordenadas cartesianas es

$$(x^2 + y^2)^2 - d^2 (x^2 - y^2) = 0;$$

en coordenadas polares su ecuación es:

$$\rho = 3 R \operatorname{sen} 2 \alpha = c \sqrt{\operatorname{sen} 2 \alpha}, \quad [1]$$

en la cual C es una constante que vale $\sqrt{3 \rho R}$, pues, por definición, en la lemniscata

$$R \rho = \text{constante.}$$

Para obtener L , tendremos:

$$\frac{dL}{d\varphi} = R = \frac{c}{3} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} 2 \alpha}};$$

desarrollando en serie e integrando:

$$L = \frac{c}{\sqrt{2}} \left(2 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{5} \sqrt{\operatorname{tg} \alpha^5} + \frac{1}{12} \sqrt{\operatorname{tg} \alpha^9} - \frac{5}{104} \sqrt{\operatorname{tg} \alpha^{13}} + \dots \right),$$

fórmula muy complicada, que ROYAL, DAWSON sustituye por una aproximada:

$$L = \frac{\sqrt{2} c \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}} \times \cos k \alpha = 6 R \alpha \sqrt{\cos \alpha} \times \cos k \alpha,$$

en la cual, k es un coeficiente cuyos valores da en la tabla que a continuación reproducimos.

TABLA II

Valores de la constante K de la fórmula de ROYAL-DAWSON.

<i>a</i>	<i>k</i>	Diferencia por grado	<i>a</i>	<i>k</i>	Diferencia por grado
1°	. 1920	. 0006	24°	. 17775	. 00075
2°	. 1914	»	25°	. 1770	»
3°	. 1908	»	26°	. 1761	. 0009
4°	. 1902	»	27°	. 1752	»
5°	. 1896	»	28°	. 1743	»
6°	. 1890	»	29°	. 1734	»
7°	. 1884	»	30°	. 1725	»
8°	. 1878	»	31°	. 1716	»
9°	. 1872	»	32°	. 1707	»
10°	. 1866	»	33°	. 1698	»
11°	. 1860	»	34°	. 1689	»
12°	. 1854	»	35°	. 1680	»
13°	. 1848	»	36°	. 167075	. 000925
14°	. 1842	»	37°	. 16615	»
15°	. 1836	»	38°	. 165225	»
16°	. 1830	»	39°	. 1643	»
17°	. 1824	»	40°	. 163375	»
18°	. 1818	»	41°	. 16245	»
19°	. 1812	»	42°	. 161525	»
20°	. 1806	»	43°	. 1606	»
21°	. 1800	»	44°	. 159675	»
22°	. 17925	. 00075	45°	. 15875	»
23°	. 1785	»			

La fórmula puede escribirse en la forma:

$$L = 6 R (\alpha - N_L),$$

en la cual N_L , cuyo valor viene dado en la tabla I, es una cantidad despreciable para ángulos pequeños, o sea que en este caso

$$L = 6 R \alpha.$$

Propiedad fundamental de la lemniscata es:

$$\alpha = \frac{\varphi}{3}; \text{ o sea: } \varphi = 3 \alpha; \text{ tg } \alpha = \text{tg } \frac{\varphi}{3};$$

las coordenadas cartesianas, x e y , pueden determinarse fácilmente:

$$y = \rho \operatorname{sen} \alpha = L \alpha \text{ para ángulos pequeños,}$$

$$x = \rho \cos \alpha = L \text{ para ángulos pequeños;}$$

se tiene también

$$\rho = c \sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha} = \sqrt{3\rho R} \sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha} = \sqrt{3\rho R} \sqrt{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha};$$

para pequeños ángulos:

$$\rho = L; \operatorname{sen} \alpha = \alpha; \cos \alpha = 1;$$

luego sustituyendo

$$L = \sqrt{6LR} \sqrt{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{L^2}{6LR}; L\alpha = y = \frac{L^3}{6LR} = \frac{x^3}{6RL},$$

aproximadamente como en el caso de la espiral.

47. Parábola cúbica. — Su fórmula es $y = m' x^3$, siendo m' una constante; haciendo $m' = \frac{1}{3m^2}$, la fórmula se transforma en $y = \frac{x^3}{3m^2}$, similar a la espiral para ángulos pequeños; por tanto, tendremos como en ésta, $m^2 = 2RL$, y podremos escribir sustituyendo $y = \frac{x^3}{6RL}$.

En la parábola cúbica, R decrece según α crece hasta 9° , y aumenta para ángulos mayores.

El radio R vale:

$$R = \frac{x}{\operatorname{sen} 2\varphi \cos \varphi}.$$

Los valores de α y φ vienen dados en función de x por las fórmulas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = m' x^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = 3m' x^2;$$

de donde se deduce:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3} \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} \varphi = 3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Finalmente, para pequeños ángulos, tendremos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2}{6RL}$$

como $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$, aproximadamente, y $x = L$, aproximadamente también, tendremos:

$$\alpha = \frac{L^2}{6RL} = \frac{L}{6R}, \text{ o sea: } L = 6R\alpha.$$

48. Fórmulas corrientes. — ROYAL, DAWSON resume las fórmulas corrientemente empleadas:

Espiral o clotoide:

$$L = 6R(\alpha + N_s) = \sqrt{2RL} \sqrt{\varphi} = 2R\varphi = 6R\alpha \text{ para ángulos pequeños;}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{3} - N_s = \frac{\varphi}{3} \text{ para ángulos pequeños;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varphi}{3} + Q = \frac{\varphi}{3} \text{ para ángulos pequeños;}$$

$$y = \frac{x^3}{6RL} \text{ para ángulos pequeños;}$$

$x = L$, aproximadamente, para ángulos muy pequeños.

Lemniscata:

$$L = 6R(\alpha - N_L) = 6R\alpha \text{ para ángulos pequeños;}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{3} \text{ para cualquier ángulo;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} \text{ para cualquier ángulo;}$$

$$\rho = C \sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha} = c \sqrt{\operatorname{sen} \frac{2}{3}\varphi} : C = \sqrt{3\rho R};$$

$$y = \frac{x^3}{6RL} \text{ para ángulos pequeños;}$$

$x = L$, aproximadamente, para ángulos muy pequeños.

Parábola cúbica :

$L = 6 R \alpha$ para ángulos pequeños ;

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3}$ para cualquier ángulo ;

$y = \frac{x^3}{3 m^2} = \frac{x^3}{6 R L}$ para ángulos pequeños ;

$x = L$, aproximadamente, para ángulos muy pequeños.

49. Fórmulas comunes para pequeños ángulos.

$$L = 6 R \alpha ; \quad \alpha = \frac{L}{6 R}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{3} ; \quad y = \frac{x^3}{6 R L} ;$$

donde $x = L$ para ángulos muy pequeños .

$$\alpha = \frac{L}{6 R} ,$$

que da α en radianes ; para obtener α en grados, tendremos :

$$\alpha^\circ = \frac{L}{R} \times 9,55$$

$\frac{L}{R} \times 9,55 = \alpha^\circ + N_s$ para la espiral.

$\frac{L}{R} \times 9,55 = \alpha^\circ - N_L$ para la lemniscata ;

$\varphi^\circ = \frac{L}{R} \times 28,65 = 3(\alpha^\circ + N_s)$ para la espiral ;

$= 3 \alpha^\circ$ para la lemniscata ;

Angulo $\beta = \varphi - \alpha$;

" $= 3(\alpha + N_s) - \alpha = 2 \alpha + 3 N_s$ para la espiral ;

" $= 3 \alpha - \alpha = 2 \alpha$ para la lemniscata.

50. **Curva de transición preferible.** — La parábola cúbica tiene el mínimo de su radio de curvatura para un ángulo polar de $8^\circ 28' 29''$;

es decir, que sólo conviene para curvas de grandes radios; se usa para ferrocarriles desde hace muchos años, y, en cambio, por la razón antes apuntada es poco útil para carreteras en cuyos trazados es preciso emplear ángulos polares mayores.

La elección para caminos queda limitada entre la clotoide y la lemniscata de BERNOULLI.

D. Bienvenido OLIVER, en su publicación *La curva de transición de carreteras y la lemniscata de BERNOULLI*, al tratar la elección, dice:

“a) En la espiral es muy sencilla la expresión de la longitud del arco

$$L = 2 R \varphi;$$

pero en cambio no lo es tanto, ni mucho menos, la relación entre α y φ :

$$\alpha = \frac{\varphi}{3} - \frac{8 \varphi^3}{2835} + \frac{32 \varphi^5}{467775} - \dots$$

que puede reducirse a

$$\alpha = \frac{\varphi}{3}$$

cuando α es muy pequeño; en caso contrario, es preciso aplicar un término de corrección, cuya evaluación no es sencilla (el N_s , de acuerdo con ROYAL DAWSON).

En la lemniscata, para cualquier valor de φ :

$$\alpha = \frac{\varphi}{3}; \quad \beta = 2 \alpha$$

con toda exactitud.

b) Para una misma longitud de arco en ambas curvas, el radio de curvatura disminuye más gradualmente en la lemniscata que en la clotoide, circunstancia que favorece la seguridad de la circulación y que facilita el paso de la transición a la curva circular, y viceversa.

c) La lemniscata es una curva cerrada y finita que tiene un eje de simetría; el valor mínimo del radio de curvatura corresponde al punto cuyas ordenadas polares son 45° y la magnitud del eje de simetría, en función de la cual se pueden calcular todos los elementos geométricos de la curva y consignarlos en tablas convenientemente dispuestas, tanto para coordenadas polares como para cartesianas.

De todo lo expuesto resulta indiscutible que la radioide más conve-

niente para la curva de transición de carreteras es la lemniscata de BERNOULLI”.

Las razones que alega el Sr. OLIVER en favor de la lemniscata, son por tanto atendibles desde el punto de vista práctico de la construcción; lo mismo opina el ingeniero GALATOIRE MALÉGARIE, de la administración de Ponts et Chaussées del Marruecos Francés, uno de los iniciadores de curvas de transición en carreteras. Según el profesor ARRIANO, “Le curve di raccordo stradale. Ricerche e Studi del Instituto Sperimentale Stradale, 1939”, la clotoide es la curva más racional, como curva de transición, desde el punto de vista del movimiento transversal; los alema-

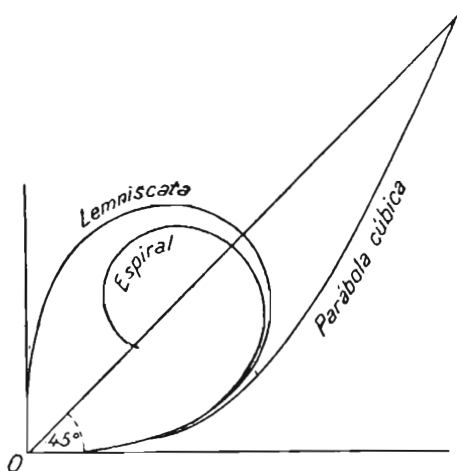


Fig. 40. — Comparación de las tres curvas de transición.

nes opinan también lo mismo, y han adoptado esta curva en la mayoría de las modernas autoestradas.

En realidad, las dos curvas, espiral y lemniscata, como puede apreciarse en la figura 40, se diferencian muy poco cuando los ángulos polares son pequeños: desde el punto de vista del vehículo, es tal vez teóricamente más recomendable la clotoide, aunque la diferencia sea muy pequeña y la ventaja teórica pueda verse compensada con la facilidad del replanteo de la lemniscata.

En ferrocarriles sigue empleándose la parábola cúbica.

51. Cálculo de los elementos de la curva de transición.— Intercalar una curva de transición, como paso de una alineación recta a una curva de radio determinado, tiene como consecuencia el suavizar am-

los accesos de la curva circular, haciendo que en ellos, y durante la longitud calculada, la aceleración centrífuga no crezca a mayor ritmo del que permite la seguridad y comodidad del vehículo que recorre la curva a una determinada velocidad específica.

Generalmente, en el estudio del anteproyecto, e incluso del proyecto, se unen las alineaciones rectas con curvas del radio determinado y el peralte preciso, para la velocidad específica; al hacer el estudio de los planos de construcción del camino, es cuando se estudian las curvas de

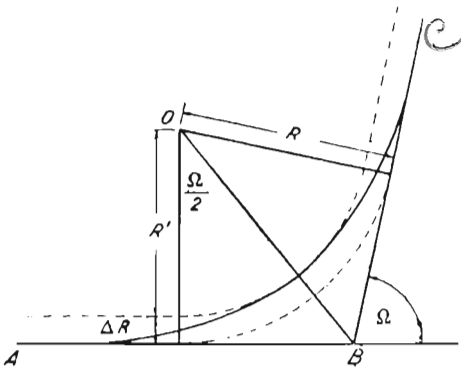


Figura 41.

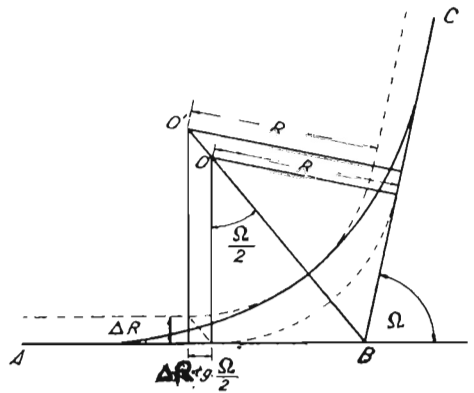


Figura 42.

transición donde son necesarias. Si tenemos dos alineaciones, AB y BC (figura 41), unidas por una curva circular de radio R y queremos proyectar las curvas de transición, tendremos que alargar la curva primitiva en sus dos zonas de tangencia, o bien conservar las tangentes, disminuyendo el radio de la curva, trazándola con uno nuevo, R' , tal que $R' = R - \Delta R$, siendo ΔR la magnitud que es preciso trasladar la curva; si no se quiere disminuir el radio de la curva, el ajuste deberá hacerse aumentando la magnitud de la tangente en una longitud $\Delta R \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2}$, siendo Ω el primitivo ángulo en el centro (fig. 42). El trazado de la curva de transición ha de partir de tres cantidades fundamentales: ΔR , R y L ; no son entre sí independientes; dadas dos de ellas, la otra está determinada. Esta determinación, de acuerdo con ROYAL DAWSON, se hace de la manera siguiente:

Sea A el punto de tangencia determinado en el anteproyecto (fig. 43); se traza la perpendicular AK hasta el centro del círculo; sea $AE = \Delta R$ la magnitud que es preciso trasladar al círculo de acuerdo; tracemos por E la paralela a la tangente primitiva, AB , que será la tangente a la

las coordenadas en función de las longitudes de cuerdas, que, por hipótesis, son iguales a las abscisas; para 10 cuerdas, tendremos:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{(0,1 L)^3}{6 L R} = \frac{(0,1)^3 \times L^2}{6 R} = 0,001 \times Y \\
 y_2 &= \dots\dots\dots = (0,2)^3 \times y = 0,008 \times Y \\
 y_3 &= \dots\dots\dots = (0,3)^3 \times y = 0,027 \times Y \\
 y_4 &= \dots\dots\dots = (0,4)^3 \times y = 0,064 \times Y \\
 y_5 &= \dots\dots\dots = (0,5)^3 \times y = 0,125 \times Y = \frac{1}{2} \Delta R \\
 y_6 &= \dots\dots\dots = (0,6)^3 \times y = 0,216 \times Y \\
 y_7 &= \dots\dots\dots = (0,7)^3 \times y = 0,343 \times Y \\
 y_8 &= \dots\dots\dots = (0,8)^3 \times y = 0,512 \times Y \\
 y_9 &= \dots\dots\dots = (0,9)^3 \times y = 0,729 \times Y \\
 y_{10} &= \dots\dots\dots = (1,0)^3 \times y = 1,000 \times Y
 \end{aligned}$$

y exactamente igual podrían calcularse los valores para 8, 6 ó 4 cuerdas.

En cada caso están determinadas las dos alineaciones, y se conoce, por tanto, el ángulo en el centro Ω ; conocemos igualmente el radio R del círculo, que las uniría si no hubiese curvas de transición; fijada la velocidad y la aceleración centrífuga máxima admisible, se determinará la longitud de la curva de transición por la fórmula

$$L = \frac{V^3}{J R};$$

esta fórmula se convierte, para el valor de J , admitido por SHORTT, de 0,305 metros por segundo y segundo, en:

$$L = 0,0703 \frac{V^3}{R},$$

midiendo en:

metros, las longitudes;
segundos, los tiempos;
kilómetros-hora, las velocidades.

Determinada la longitud necesaria de la curva de transición, se determina el máximo ángulo polar, α , por la fórmula

$$\alpha = \frac{L}{R} \times 9,55 + N_L \text{ para la lemniscata,}$$

$$\alpha = \frac{L}{R} \times 9,55 - N_s \text{ para la espiral,}$$

siendo N_L y N_s términos de corrección que pueden despreciarse cuando α es pequeño y que, calculados por ROYAL DAWSON, se detallan en la tabla I.

En el caso de la lemniscata se determina el valor de ρ , que corresponde al máximo ángulo polar, por la fórmula $\rho_1 = 3 R \operatorname{sen} 2\alpha$, y la constante de la lemniscata por la fórmula $C = \sqrt{3 \rho_1 R}$; conocido el valor de C se puede determinar para cada valor del ángulo polar el correspondiente de ρ , por la fórmula:

$$\rho = C \sqrt{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

Al llegar al punto correspondiente al máximo valor de α se hace estación en él con el teodolito, y formando con la dirección PO un ángulo

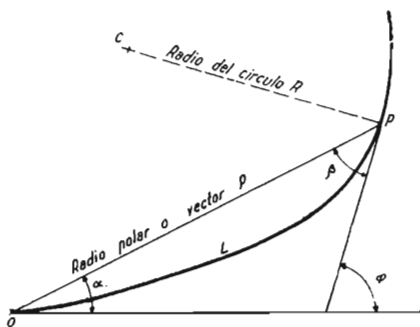


Figura 44.

gulo $\beta = 2\alpha$ (fig. 44), tenemos la alineación de la tangente común a las dos curvas.

El procedimiento es sencillo, pero tiene dos inconvenientes; en primer lugar, es necesario realizar muchas mediciones de longitudes grandes, expuestas a errores de importancia; y en segundo lugar, la configuración del terreno puede impedir, a veces, el replanteo por coordenadas polares.

En muchos casos, es conveniente, por exigirlo así la configuración del terreno, efectuar el replanteo por coordenadas cartesianas; se puede hacer empleando directamente las fórmulas de las distintas curvas o aplicando las fórmulas aproximadas de la página 77; cuando el valor del ángulo α no permite el empleo de estas fórmulas sencillas, será necesario realizar cálculos que, aunque fáciles, resultan pesados y expuestos a errores. ROYAL DAWSON y D. BIENVENIDO OLIVER, han preparado, para evitarlos, tablas calculadas para una lemniscata tipo; el primero, para

la lemniscata en la cual el radio vector correspondiente a un ángulo $\alpha = 16'$ vale la unidad; el Sr. OLIVER, para la lemniscata en la cual la constante $C = 100$; la constante de la lemniscata de ROYAL DAWSON valdrá, por tanto, $C_R = \frac{1}{\sqrt{\text{sen } 32'}} = 10,3648$. Las tablas del Sr. OLIVER tienen para nosotros la inapreciable ventaja de estar en unidades métricas. Determinada la longitud de la transición precisa y el valor de la constante de la lemniscata que el radio de la curva principal exige, de las tablas pueden

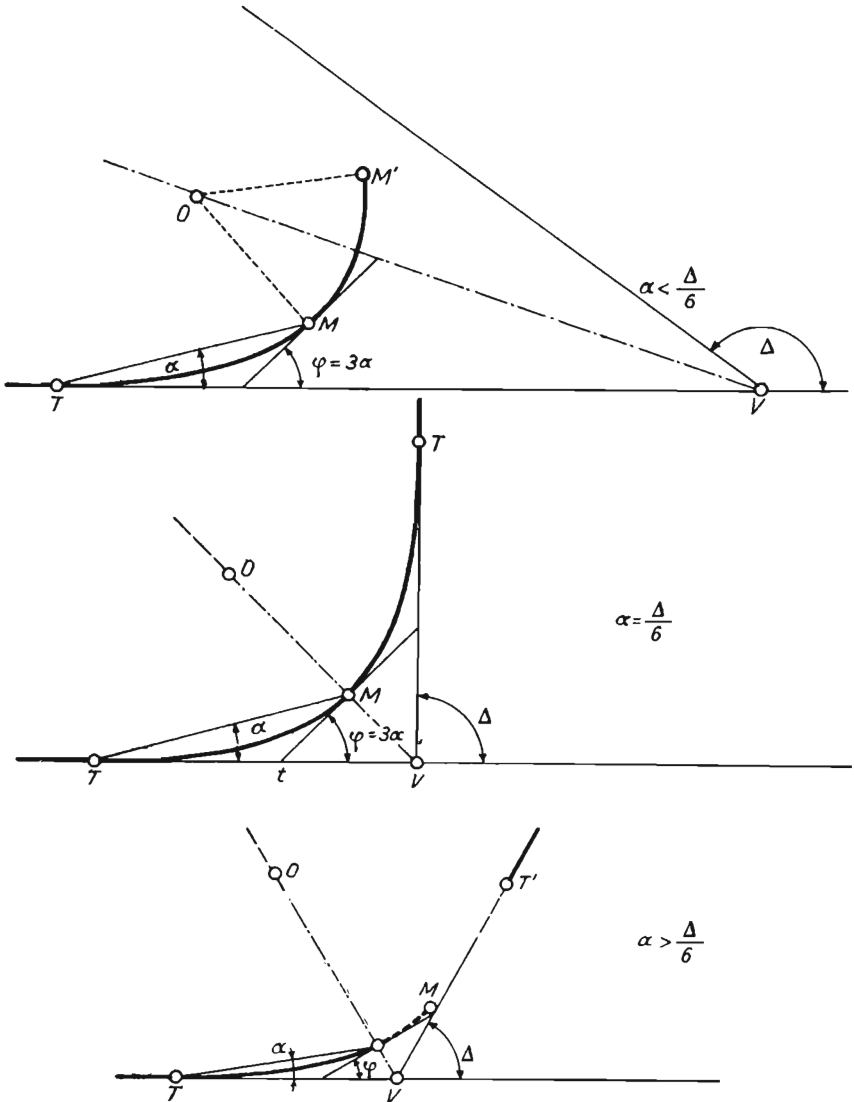


Figura 45.

Pendiente transversal en las curvas y retranqueos correspondientes de la tangente

R = Radio de la curva.
 q = Pendiente transversal %

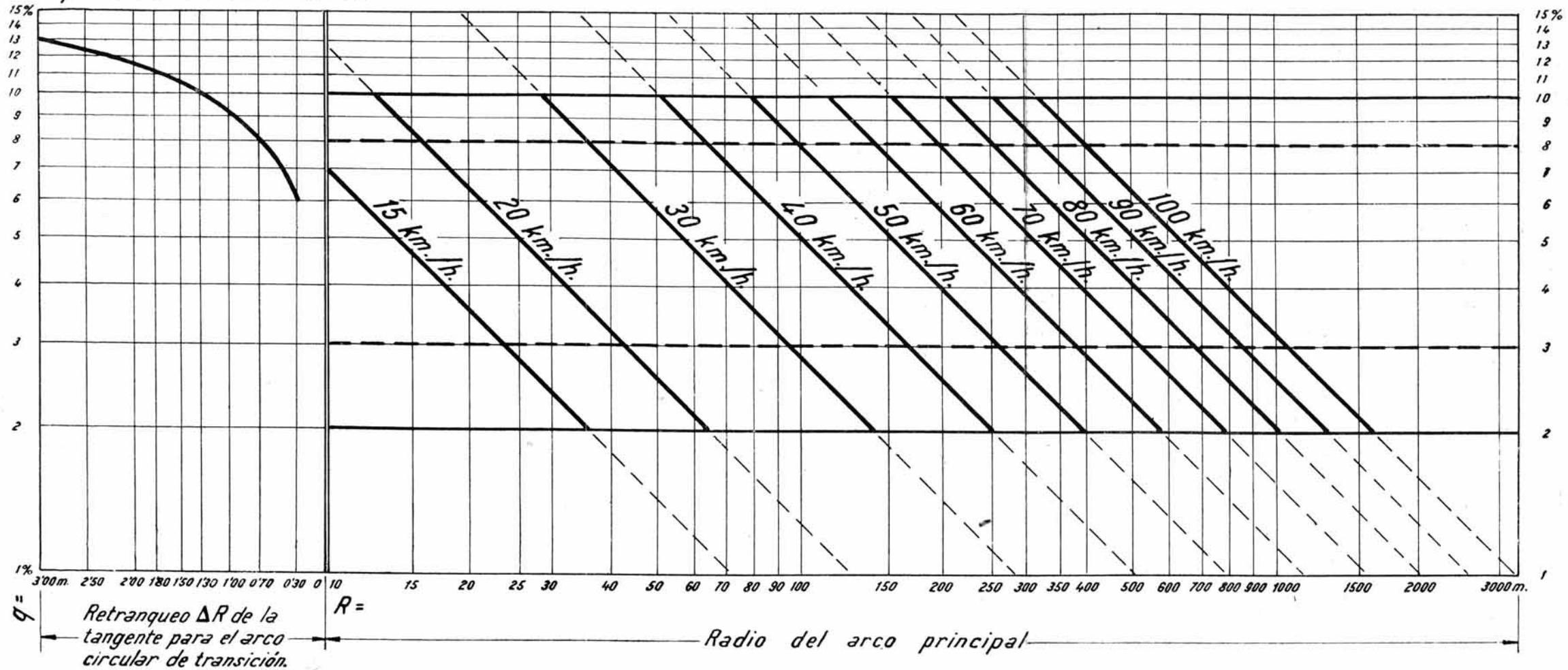


Figura 46.

Las curvas pronunciadas que bajan al valle girando hacia la izquierda, se construyen con perfiles transversales en forma cóncava, con un peralte mínimo del 10% en la parte exterior del camino.

obtenerse los elementos que se deseen para hacer el trazado y replanteo, multiplicando los que en ellos figuran por la relación de las constantes, de la lemniscata tipo y de la necesaria en cada caso particular.

Determinado este ángulo, pueden presentarse tres casos (fig. 45):

$$1.^\circ \quad \alpha^\circ < \frac{\Omega}{6}.$$

$$2.^\circ \quad \alpha^\circ = \frac{\Omega}{6}.$$

$$3.^\circ \quad \alpha^\circ > \frac{\Omega}{6}.$$

En el primer caso existirán dos transiciones, unidas por un arco circular; el radio de éste, R , y la tangente común en el punto de unión, se determinan fácilmente; el primero, por la fórmula indicada, y el segundo, por el valor de φ , correspondiente a α° .

En el segundo caso no existirá curva circular; la unión de las dos alineaciones se hará por un arco completo de lemniscata o clotoide.

En el tercer caso no será posible la solución; habrá que variar el ángulo de las alineaciones o las características de cálculo del camino, C y V .

Para más detalle, en relación con este interesante problema, remitimos al lector a las tantas veces citadas obras de ROYAL DAWSON, *Elements of Curve Design*, y B. OLIVER, *La curva de transición en la carretera y la lemniscata de BERNOULLI*, de las cuales están tomadas la mayoría de las ideas expuestas.

52. Curva de transición circular. — La curva de transición resuelve el problema teórico de una manera exacta; su replanteo es sencillo, pero exige el empleo de tablas que no son corrientes; por otra parte, la exactitud de la solución teórica no es precisa en la práctica; los alemanes, en las autoestradas, han adoptado para curva de transición una circular de radio doble de la circular principal; con ello el eje del camino se desvía solamente unos pocos centímetros de la curva teórica de transición; desviación perfectamente admisible, pues las dimensiones que se dan a las secciones transversales del camino permiten el pequeño juego que representa. Esta solución exige un retranqueo de la tangente, hacia la parte exterior de la curva; retranqueo que, de acuerdo con las instrucciones alemanas, viene dado en función del radio y de la velocidad específica del camino. En el gráfico de la figura 46, entrando con el valor de la velocidad específica, se tienen el radio, la pendiente transversal nece-

saría para el camino y, en la curva de la parte izquierda, el valor conveniente del retranqueo de la tangente; cuando es menor de 0,30 metros, se prescinde de él. Determinado el retranqueo, en la tabla de la figura 47, y para el valor del radio del arco circular, se determinan los valores de a , valores que se llevan (fig. 48) sobre las tangentes en los dos sentidos; el punto VA fija el de partida del arco circular de transición, y el VE , el de tangencia con el arco circular principal; el punto VE está a una distancia $2 \Delta R$ de la tangente. La clotoide de transición arranca en un punto, V , antes que la curva circular, a distancia $b = 0,732 a$, y termina en un punto V_1 a igual distancia, contada sobre el arco circular principal. La determinación anterior es la que prescribe la Instrucción para las auto-estradas alemanas. A nuestro juicio, tal vez fuese más lógico, en vez de determinar el retranqueo partiendo de la velocidad específica y del radio de la curva, empezar por fijar el radio de la curva circular y la longitud precisa de la transición, de acuerdo con el criterio general señalado; la longitud de la transición puede considerarse aproximadamente igual a $2 a + 2 b$; como conocemos la relación $b = 0,732 a$, se pueden determinar los valores de a y b ; el retranqueo se determina por la fórmula teórica. Cuando por ser α relativamente grande no sea correcto aplicar las fórmulas aproximadas, se utilizarán las exactas, igualando la x correspondiente al máximo valor de α , a $2 a + 2 b$. Los radios y peraltes prescritos por la Instrucción Alemana son mucho mayores que los determinados teóricamente, no sólo por las consideraciones de deslizamiento y vuelco, sino incluso por la razón de visibilidad, que estudiamos a continuación; no consideramos como precisos en general valores tan altos, que la mayoría de las veces resultarán antieconómicos. No emplean curvas de transición para radios mayores de 650 metros.

Ejemplo: En un camino con firme de hormigón y velocidad específica de 100 Km./hora, dos alineaciones forman un ángulo de 70° y están unidas por una curva circular de 340 metros de radio; vamos a calcular la curva de transición teórica y la circular, de la Instrucción Alemana.

Longitud de la curva de transición necesaria: $L = 0,0703 \frac{V^3}{R} = 207$ metros.

Máximo ángulo polar: $\alpha = \frac{L}{R} \times 9,55 = 5^\circ 48'$.

Ángulo de la tangente en P (fig. 43): $\varphi = 3 \alpha = 17^\circ 24'$.

Subtangente en P : $\frac{1}{3} OB \times \frac{1}{3} L = \frac{207}{3} = 69$.

Ordenada de P : $PB = y = OB \operatorname{tg} \alpha = 207 \times 0,100774 = 20,86$ metros.

Dimensiones de los semiarcos de transición a y del ángulo en el centro $\min \varphi$ en función de R y ΔR

En terrenos muy accidentados la dirección de las alineaciones debe fijarse partiendo de los valores de R ó ΔR ó de ambos para que el ángulo en el centro no descienda del mínimo que fija el cuadro, pues en este caso no sería posible establecer la transición; cuando el ángulo en el centro es igual a $\min \varphi$, desaparece el arco principal.

R	Retranqueos de la tangente ΔR en metros																													
	0,30 0,60 0,80 1,00 1,20 1,50 1,80 2,00 2,50 3,00 3,50 4,00 4,50 5,00																													
	Valores de los elementos de replanteo a en mts. y $\min \varphi$ en grados																													
Mts.	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ	a	φ		
10	2.43	56°	3.41	79°	3.92	92°	4.30	103°	4.76	112°	5.27	126°	5.72	138°	6.00	145°	6.61	162°	7.14	178°										
15	2.90	46°	4.20	65°	4.83	75°	5.39	84°	5.88	92°	6.34	103°	7.12	112°	7.48	118°	8.29	132°	9.00	145°	9.63	159°	10.20	171°						
20	3.45	40°	4.86	56°	5.60	65°	6.20	73°	6.82	80°	7.60	89°	8.29	97°	8.72	103°	9.68	115°	10.54	126°	11.30	138°	12.00	147°	12.64	157°	13.23	166°		
30	4.23	33°	5.97	46°	6.88	53°	7.68	59°	8.40	65°	9.37	73°	10.24	80°	10.77	84°	12.00	94°	13.08	103°	14.06	112°	14.97	120°	15.80	127°	16.58	134°		
40	4.89	28°	6.90	40°	7.96	46°	8.89	51°	9.72	56°	10.85	63°	11.86	69°	12.49	73°	13.92	81°	15.20	89°	16.33	96°	17.44	103°	18.43	110°	19.36	116°		
50	5.47	25°	7.77	36°	8.91	41°	9.95	46°	10.89	50°	12.16	56°	13.30	62°	14.08	65°	15.61	73°	17.06	80°	18.38	86°	19.60	92°	20.73	98°	21.79	103°		
60	5.99	23°	8.46	33°	9.77	38°	10.91	42°	11.94	46°	13.33	51°	14.59	56°	15.36	59°	17.14	66°	18.73	73°	20.19	79°	21.54	84°	22.80	89°	23.98	94°		
80	6.92	20°	9.78	28°	11.29	32°	12.61	36°	13.80	40°	15.42	44°	16.87	49°	17.78	51°	19.84	57°	21.70	63°	23.40	68°	24.98	73°	26.45	77°	27.84	81°		
100	7.74	18°	10.94	25°	12.62	29°	14.11	33°	15.45	36°	17.26	40°	18.69	44°	19.90	46°	22.22	51°	24.31	56°	26.22	61°	28.00	65°	29.65	69°	31.23	73°		
150	9.48	15°	13.40	21°	15.47	24°	17.29	27°	18.94	29°	21.16	32°	23.17	35°	24.41	38°	27.27	42°	29.65	46°	32.21	50°	34.41	53°	36.47	56°	38.41	59°		
200	10.95	13°	15.48	18°	17.87	21°	19.98	23°	21.88	25°	24.45	28°	26.77	31°	28.21	33°	31.52	36°	34.51	40°	37.25	41°	39.80	46°	42.19	49°				
300	13.41	10°	18.96	15°	21.89	17°	24.47	19°	26.87	21°	29.96	23°	32.81	25°	34.58	27°	38.65	30°	42.32	33°	45.69	35°	48.83	37°	51.77	40°				
400	15.49	9°	21.90	13°	25.29	15°	28.27	16°	30.96	18°	34.61	20°	37.90	22°	39.95	23°	44.65	26°	48.90	28°	52.80	30°	56.43	32°						
500	17.32	8°	24.49	11°	28.27	13°	31.61	15°	34.62	16°	38.70	18°	42.39	20°	44.68	21°	49.94	23°	54.69	25°	59.06	27°	63.12	29°						
600	18.97	7°	26.83	10°	30.97	12°	34.63	13°	37.93	15°	42.40	16°	46.44	18°	48.95	19°	54.72	21°	59.92	23°	64.21	25°								
800	21.91	6°	30.98	9°	35.77	10°	39.99	12°	43.80	13°	48.97	14°	53.64	15°	56.53	16°	63.20	18°	69.22	20°										
1000	24.49	6°	34.60	8°	39.99	9°	44.71	10°	48.98	11°	54.75	13°	59.97	14°	63.21	15°	70.67	16°	77.40	18°										
1200	26.83	5°	37.97	7°	43.81	8°	48.98	9°	53.63	10°	59.98	12°	65.20	13°	69.25	13°	77.42	15°	84.80	16°										
1500	30.00	5°	42.42	7°	48.98	8°	54.76	8°	59.89	9°	67.07	10°	73.46	11°	77.43	12°	86.57	13°	94.82	15°										

Para valores intermedios se puede interpolar linealmente

Retranqueo del círculo principal: $S = \frac{PB}{4} = 5,215$ metros.

Dividiendo en 10 partes iguales la abscisa OB , las ordenadas correspondientes a partir del punto O , serán:

$y_1 = 0,001 \times y =$	$0,02086$	m.
$y_2 = 0,008 \times y =$	$0,1669$	"
$y_3 = 0,027 \times y =$	$0,5632$	"
$y_4 = 0,064 \times y =$	$1,3350$	"
$y_5 = 0,125 \times y =$	$2,6075$	"
$y_6 = 0,216 \times y =$	$4,5058$	"
$y_7 = 0,413 \times y =$	$7,1550$	"
$y_8 = 0,512 \times y =$	$10,6803$	"
$y_9 = 0,729 \times y =$	$15,2069$	"
$y_{10} = 1 \times y =$	$20,8600$	"

La curva circular de transición de la Instrucción Alemana se proyecta partiendo del radio, retranqueo y longitud de transición obtenidas anteriormente, pues los radios y peraltes que la referida Instrucción da, resultan, a nuestro juicio, exagerados; además, así es posible, con idéntico criterio, comparar la solución de la curva de transición teórica con la circular aproximada. El círculo de radio $2R = 680$ metros es tangente en VE (fig. 48) al círculo de radio, R , retranqueado 5,215 metros, y en VA a la alineación recta; de la figura se deduce:

$$2a + 2b = 207, \text{ longitud de la transición teórica.}$$

como $b = 0,732 a$, resulta:

$$a \approx 60 \text{ m.}$$

$$b \approx 44 \text{ "}$$

Referidos a los mismos ejes que la transición teórica, el círculo de radio $2R = 680$ metros tiene por ecuación:

$$(x - 44)^2 + (y - 680)^2 = 680^2.$$

Las coordenadas del círculo de radio doble, para las mismas abscisas que la transición teórica serán (teniendo en cuenta que $V - VA = b = 0,212 L$, y la x de $VE = 2a + b = 164 \text{ m.} = 0,79 L$):

$x_3 = 62,10$	$y_3 = 0,24$	m.
$x_4 = 82,8$	$y_4 = 1,11$	"
$x_5 = 103,5$	$y_5 = 2,61$	"
$x_6 = 124,2$	$y_6 = 4,74$	"
$x_7 = 144,9$	$y_7 = 7,53$	"

Se ve la pequeña diferencia que existe entre las ordenadas de la curva circular de transición y la curva teórica, que, en el punto de máxima diferencia, sólo alcanza a 0,375 m.

53. Visibilidad. — La seguridad del vehículo en el camino precisa unas condiciones mínimas de visibilidad; si en la trayectoria que ha de seguir se encuentra un obstáculo, es preciso que el conductor lo vea con tiempo suficiente para que, teniendo en cuenta la velocidad de marcha, pueda salvarlo, apartándose de él si la anchura de la carretera lo per-

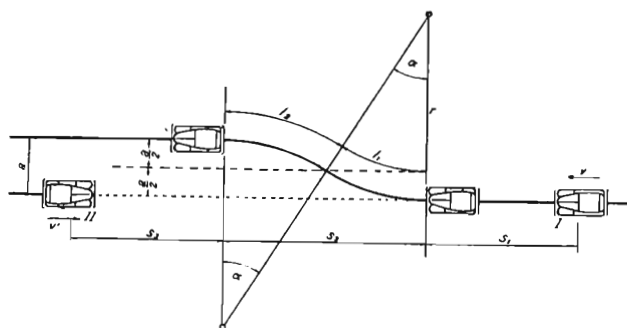


Figura 49.

mite, o pueda parar por la acción de los frenos, antes de llegar a chocar. Vamos a estudiar primeramente el caso de cruce de dos vehículos en marcha. Si el camino tiene el ancho suficiente, cada uno debe circular por su mano, y entonces el problema no existe; pero supongamos que, por una circunstancia cualquiera, los dos coches marchan en sentido contrario por la misma trayectoria. Al divisarse los dos vehículos, el que va fuera de su mano, vehículo 1 (fig. 49), debe desviarse, describiendo una curva y contracurva, para alcanzar, antes del cruce, una línea que permita que éste se verifique sin peligro. Ahora bien, el conductor del vehículo que marcha fuera de su mano, tarda, cuando divisa al otro, un cierto tiempo en reaccionar, tiempo que según se ha determinado experimentalmente, para un tipo de hombre normal, es un segundo; en este tiempo, si v es la velocidad en metros por segundo del vehículo 1, éste habrá recorrido:

$$S_1 = v = \frac{V}{3,6},$$

siendo V la velocidad en Km./hora; la distancia que, por otra parte, ten-

drá que recorrer hasta colocarse en su línea de tráfico será, con las notaciones de la figura, sustituyendo el doble arco por su proyección sobre la trayectoria primitiva:

$$S_2 = l_1 + l_2 = 2 \pi \times r \times \frac{\alpha}{180^\circ} \approx 2 \sqrt{r^2 - \left(r - \frac{a}{2}\right)^2} = 2 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)}.$$

En este mismo tiempo, el vehículo 2 habrá recorrido una distancia

$$S_3 = v' + 2 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)} \times \frac{v'}{v}.$$

La distancia de visibilidad estará formada por la suma de estas tres dimensiones:

$$d_v = S_1 + S_2 + S_3 = v + v' + 2 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)} \left(1 + \frac{v'}{v}\right).$$

Si los dos vehículos marchan a la misma velocidad, $v = v'$, la distancia de visibilidad será:

$$d_v = 2v + 4 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)} = \frac{V}{1,8} + 4 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)},$$

si V está expresado en kilómetros por hora; en el caso de que uno de los vehículos estuviese parado (obstáculo en la carretera), $v' = 0$, y la distancia de visibilidad valdrá:

$$d_v = v + 2 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)} = \frac{V}{3,6} + 2 \sqrt{a \left(r - \frac{a}{4}\right)}.$$

El radio r de la curva y contracurva que el vehículo describe, depende, para que la maniobra se verifique en condiciones de seguridad, de la velocidad del vehículo y de las características del pavimento; si μ_t es el coeficiente de rozamiento transversal por rotación entre el vehículo y el firme y P su peso, sabemos que deberá verificarse:

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{r} = \mu_t P;$$

de donde el radio mínimo, r , valdrá:

$$r = \frac{v^2}{g \mu_t} = \frac{V^2}{3,6^2 \cdot g \cdot \mu_t},$$

y sustituyendo este valor en la expresión de la visibilidad, tendremos:

$$d_v = v + v' + 2 \sqrt{a \left(\frac{v^2}{g \mu_t} - \frac{a}{4}\right)} \left(1 + \frac{v'}{v}\right),$$

54. Imposibilidad de cruce. Distancia de parada. — Cuando el camino es de un ancho tal que no permite el cruce de los dos vehículos a la velocidad de régimen, hay que calcular la distancia precisa para que puedan parar inmediatamente antes de chocar.

Se dice que el rendimiento del frenado es el 100 por 100 cuando la aceleración negativa, que su acción produce en el vehículo, es el 100 por 100 de la aceleración de la gravedad, o sea cuando el incremento negativo de velocidad es 35,32 Km./hora por segundo; la anterior definición supone que el rozamiento entre llantas y superficie de rodadura tiene por límite inferior el peso del vehículo, caso en el cual el coeficiente correspondiente es la unidad; se califican los rendimientos de frenado de:

Excelentes, superior a.....	70 %.
Muy bueno, entre.....	71 % y el 60 %.
Bueno, entre	60 % y el 50 %.
Regular, entre	50 % y el 40 %.
Peligroso, inferior al.....	40 %.

En el límite del rozamiento, el esfuerzo de frenado, siendo μ_r el coeficiente de rozamiento por rotación y P el peso frenado, será $\mu_r P$; en los vehículos modernos con frenos a las cuatro ruedas, el peso, P , es el total del vehículo; si solamente existen frenos en las ruedas traseras, el peso, P , sería la fracción del total del vehículo que actúa sobre ellas. El esfuerzo de frenado por el espacio recorrido, l_f , trabajo de frenado, deberá ser igual a la fuerza viva del vehículo, o sea:

$$\mu_r P \times l_f = \frac{P}{g} \times \frac{v^2}{2}.$$

luego

$$l_f = \frac{v^2}{2 g \mu_r};$$

éste será el espacio de frenado con unos frenos de rendimiento del 100

por 100; si el rendimiento, r , fuera menor, como en la práctica sucede, el espacio de frenado sería:

$$\frac{l_f}{r};$$

a este espacio debe añadirse el que el vehículo recorre en el tiempo de reacción del conductor, según hemos dicho, $1''$; la distancia del frenado será:

$$d_f = v + \frac{v^2}{2g\mu_r} = \frac{V}{3,6} + \frac{V^2}{3,6^2 \times 2g\mu_r}$$

según la velocidad esté expresada en metros por segundo o en kilómetros por hora.

La distancia de visibilidad, si queremos que los coches queden parados a una distancia de seguridad de 5 metros, será:

$$d_v = 2d_f + 5 = 2v + \frac{v^2}{g\mu_r} + 5 = \frac{V}{1,8} + \frac{V^2}{3,6^2 g\mu_r} + 5;$$

si se tratase de un obstáculo fijo, la distancia mínima de visibilidad será:

$$d_p = d_f + 5 = v + \frac{v^2}{2g\mu_r} + 5 = \frac{V}{3,6} + \frac{V^2}{3,6^2 \times 2g\mu_r} + 5.$$

Los anteriores resultados se refieren a rasantes horizontales; si tienen una pendiente $\pm i$, el esfuerzo acelerador vendrá aumentado o disminuido en $\pm iP$; luego tendremos:

$$\begin{aligned} (\mu_r P \pm iP) l_f &= \frac{P}{g} \frac{v^2}{2} \\ l_f &= \frac{v^2}{2g(\mu_r \pm i)}, \end{aligned}$$

y la distancia de frenado será:

$$d_f = v + \frac{v^2}{2g(\mu_r \pm i)}$$

La visibilidad, como en el caso anterior, será el resultado de sumar los espacios de frenado de los dos vehículos; en la distancia de frenado de uno de ellos, el que desciende, i , será afectado por el signo $+$, y el que

asciende, por el signo —, y, por tanto, la distancia de visibilidad será:

$$d_v = v + \frac{v^2}{2g(\mu_r - i)} + v + \frac{v^2}{2g(\mu_r - i)} + 5 = 2v + 5 + v^2 \times \frac{(\mu_r - i) + (\mu_r + i)}{2g(\mu_r^2 - i^2)} =$$

$$= 2v + 5 + v^2 \frac{2\mu_r}{2g(\mu_r^2 - i^2)} = 2v + 5 + \frac{\mu_r v^2}{g(\mu_r^2 - i^2)} = \frac{V}{1,8} + 5 + \frac{\mu_r V^2}{3 \cdot 6^2 \times g(\mu_r^2 - i^2)}.$$

55. Radio mínimo de la curva por razón de visibilidad. — Teniendo en cuenta la visibilidad precisa, es posible calcular en función de ella el radio mínimo de la curva.

Sea (fig. 50) un camino de doble circulación, de ancho $2a$, y sea b el de banqueta en la parte interior de la curva que permite la visibili-

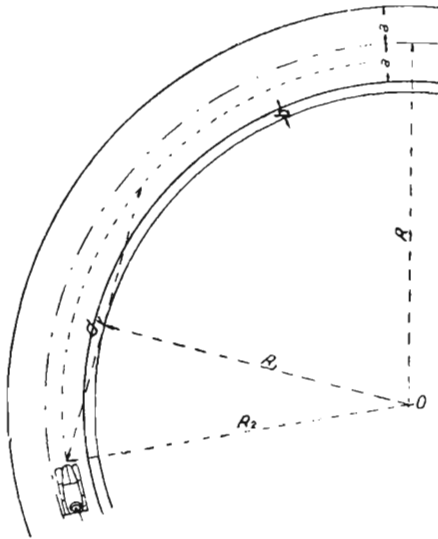


Figura 50.

dad al conductor; sea R el radio a determinar, y supongamos que el vehículo marcha por su mano; es decir, describiendo un radio medio

$R_2 = R - \frac{a}{2}$; con las notaciones de la figura, tendremos:

$$R_2^2 = R_1^2 + \left(\frac{d_v}{2}\right)^2;$$

pero tenemos, por otra parte, $R_1 = R - a - b$; $R_2 = R - \frac{a}{2}$; sustituyendo R_1 y R_2 por sus valores:

$$\left(R - \frac{a}{2}\right)^2 = (R - a - b)^2 + \left(\frac{d_v}{2}\right)^2;$$

de donde, despejando R ,

$$R = \frac{1}{a + 2b} \left[(a + b)^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{d_v^2}{4} \right]; \quad [1]$$

para un ancho normal de banqueta de 1 metro, ancho de carretera de 6 m. y distancia de visibilidad $d_v = 110$ m., el radio mínimo preciso resulta 383 m. Para distancias de visibilidad mayores, los radios resultan excesivos; en este caso, se pueden lograr las mismas condiciones de visibilidad, aumentando el ancho de la banqueta b , cuyo valor puede deducirse para una d_v y un R dados, de la fórmula [1]. Gráficamente, el problema se resuelve de un modo sencillo, con la construcción que en la figura 51 se indica, que sirve para delimitar la línea de despeje de una curva; esta solución que, en general, resulta más económica que forzar el radio sólo por razón de visibilidad, exige que la banqueta, en la zona despejada, no pase de 70 cm. de altura, de acuerdo con el perfil transversal que en la figura se establece.

Ejemplo: Camino de 8 m. de ancho, con velocidad específica $V = 100$ Km./hora y firme de hormigón hidráulico con $\mu_t = 0,60$.

Distancia de visibilidad en recta:

$$d_v = \frac{V}{1,8} + 4 \sqrt{a \left(\frac{V^2}{3,6^2 \times \mu_t \times g} + \frac{a}{4} \right)}$$

en la cual $a = 4$, semiancho del camino:

$$d_v = 147,68 \text{ m.};$$

el radio mínimo, por razón de visibilidad, vale:

$$R = \frac{1}{a + 2b} \left((a + b)^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{d_v^2}{4} \right);$$

para valores distintos de b , ancho de la banqueta, los correspondientes del radio son:

para $b = 2$	$R = 683,54$ m.
" " = 4	" = 455,04 "
" " = 6	" = 343,77 "

Se ve la influencia grande que tiene la banqueta en el radio mínimo necesario; hay que tener en cuenta que, sin banqueta construída ex profeso, todo perfil transversal de un camino entre la cuneta y el paseo, tiene un suplemento de ancho a estos efectos, sobre el de la explanación, de 1,50 a 2 m.; la explanación, especialmente ejecutada para banqueta, en el

caso de $b = 6$ m., sería del orden de 4 m.; banquetas de visibilidad mayores no resultan, en general, económicamente recomendables; el radio de la curva necesario, por razón de visibilidad, sería muy superior al preciso por razón de vuelco y deslizamiento (ejemplo epígrafe 52), aun aceptado el criterio de DERRON. Los radios que exige la Instrucción alemana son aún mayores, pues para la velocidad específica del ejemplo, sería necesario un peralte del 8 por 100 y un radio $R = 400$ m., y con

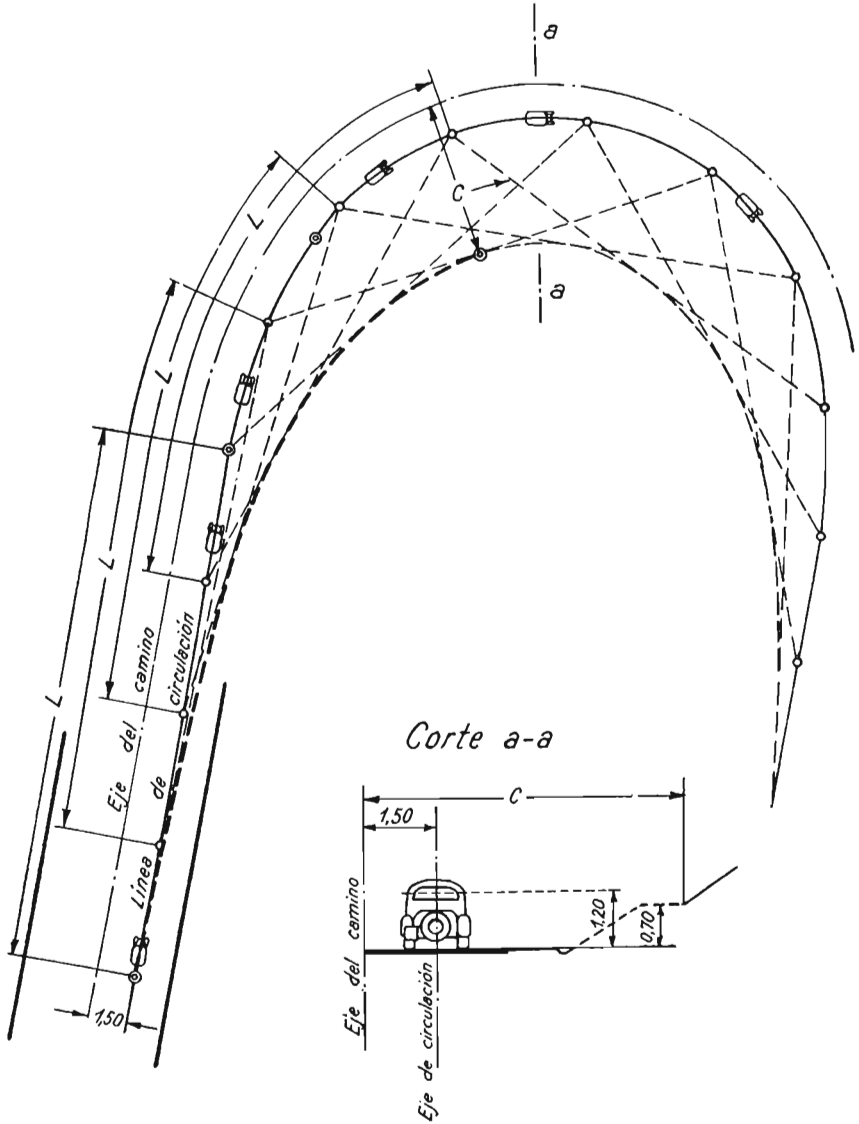


Figura 51.

un peralte del 4 por 100 serían necesarios $R = 800$ m.; valores, a nuestro juicio, superiores a los necesarios; hay que tener en cuenta que la Instrucción alemana no tiene en cuenta el ancho del camino y, por tanto, el despeje de la cuneta.

56. Transición del peralte. — Para una velocidad específica determinada, el trazado en planta estará determinado con las condiciones

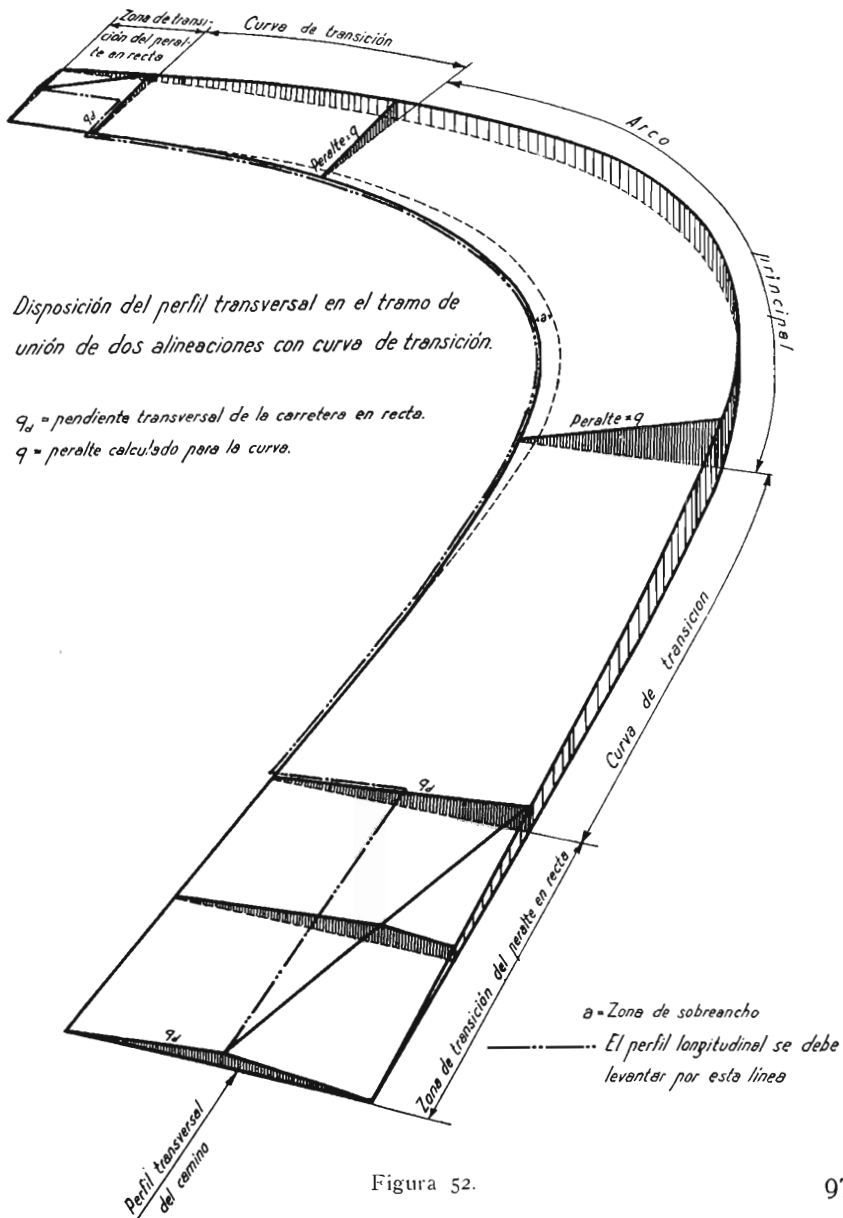


Figura 52.

estudiadas. Cada curva vendrá definida por el radio de la curva principal, y, cuando sea preciso, por las correspondientes curvas de transición; el radio de la curva y la velocidad específica habrán impuesto, por otra parte, un peralte determinado; en la zona de la curva, la superficie del camino debe ser una superficie reglada, cuyas generatrices sean rectas, que, cortando a la vertical que pasa por el centro de la curva principal, se apoyen en la curva interior del camino, siempre con la pendiente correspondiente al peralte, que debe permanecer constante en todo el desarrollo de la curva principal. En la parte recta, la sección transversal del camino debe estar formada, según veremos, por dos rectas o una curva que tengan la pendiente transversal que corresponda al firme elegido (normalmente, del 2 al 3 por 100); el tránsito de la sección en recta, a la correspondiente en curva, ha de hacerse gradualmente: una transición de niveles deberá ir dando el peralte a medida que sea necesario; si existen curvas de transición, en su desarrollo ha de hacerse la transición del peralte, que, desde el cero correspondiente a la iniciación de la curva, debe alcanzar el correspondiente a la curva principal al iniciarse ésta. La transición de peralte se logra en la forma que se indica en las figuras 52 y 53; la solución primera es más perfecta, pero más complicada. En el caso, frecuente en terrenos accidentados, con curvas y contracurvas, la solución es la que se indica en la figura 54; se debe procurar que el tramo recto sea de la mayor longitud posible.

57. Radios mínimos. — Sin perjuicio de calcular el radio mínimo, de acuerdo con las consideraciones señaladas, a continuación se dan los que fija la Instrucción española y diversos autores:

Instrucción española:

Caminos nacionales	100 m.
" comarcales	60 "
" locales	40 "

Stabilini (Costruzioni Stradali e ferroviarie):

Caminos de gran importancia en llanura	300 m.
" " " en terreno ondulado.	150 "
" " " en montaña	50 "
" de mediana importancia en llanura	50 "
" " " en terreno ondulado	30 "
" " " en montaña	30 "
" de pequeña importancia (con tráfico de tracción animal principalmente) en llanura.....	30 "
Caminos de pequeña importancia (con tráfico de tracción animal principalmente) en terreno ondulado	20 "

Simplemente, los radios de un camino no dan exactamente idea de sus condiciones de vialidad; la "tortuosidad" de un camino la define el ingeniero U. CONTRI (*Le Strade*, 1937) como la suma de los productos de los radios de cada curva por su desarrollo respectivo, dividido por el desarrollo total del camino. Aunque no exactamente, pues a igualdad

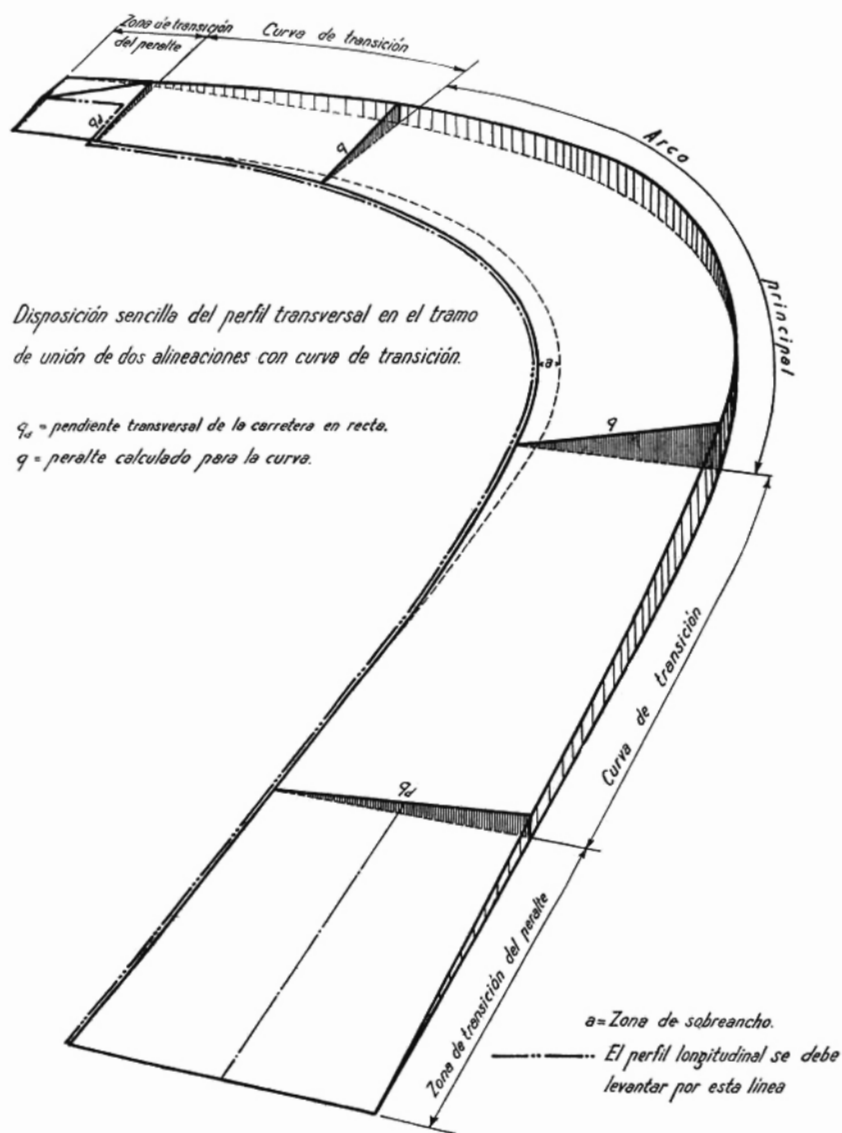


Figura 53.

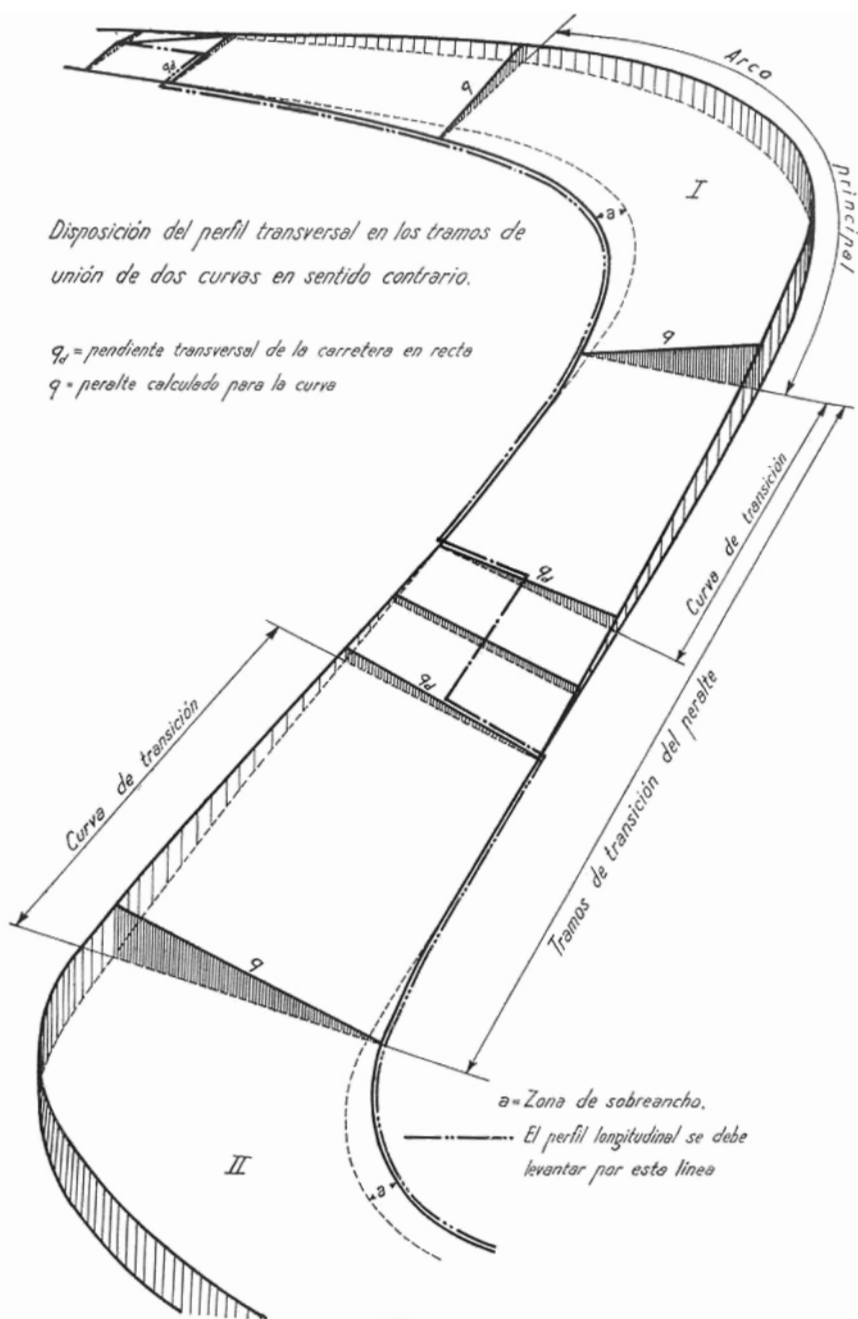


Figura 54.

de desarrollo la tortuosidad es mayor cuanto menores son los radios de las curvas, el número del ingeniero CONTRI da una idea relativa de la vialidad de un camino.

Como las condiciones de circulación son proporcionales a los radios y la tortuosidad inversamente proporcional a ellos y proporcional a la longitud de las curvas, tal vez fuera más lógico definirla por la fórmula

$$\frac{\sum \frac{D}{R}}{L};$$

siendo D , el desarrollo de cada curva; R , su radio respectivo, y L , la longitud total del camino.

✕ **58. Ferrocarriles. Influencia de las curvas.** — La influencia de las curvas debe ser examinada en un ferrocarril desde dos puntos de vista: aumento de resistencia a tracción y limitación de velocidad.

a) *Aumento de resistencia a tracción.* — El paso de un tren por una curva da origen a una resistencia suplementaria, que tiene por causa, por una parte, la fuerza centrífuga, horizontal normal a la vía, y, por otra, la solidaridad de las dos ruedas de un mismo eje: cada una marcha por un carril y como éstos tienen desarrollo diferente, una rueda interior, patina sobre el carril.

El aumento de resistencia, en kilogramos por tonelada de tren, se calcula corrientemente por la fórmula:

$$R_c = \frac{500 \times a}{R}$$

en la cual a es el ancho de la vía, y R , el radio de la curva en metros. Una curva de radio R es, por tanto, equivalente a un aumento de pendiente en milímetros por metro de R_c ; la suma de la pendiente real y la equivalente a la curva se denomina "pendiente virtual".

Peralte. — Para que no exista acción de la pestaña contra el carril, es necesario que la resultante del peso y de la fuerza centrífuga sea normal a la vía; será preciso que se verifique (triángulos POR y ABD , figura 55):

$$\frac{OP}{BD} = \frac{PR}{AD}.$$

$$OP = P; AD = BD \operatorname{tg} \alpha; PR = \frac{mv^2}{R} = \frac{P}{g} \frac{v^2}{R},$$



siendo R el radio de la curva; sustituyendo, tendremos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} ;$$

si a es el ancho de la vía, tendremos, aproximadamente (puesto que $\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$), que el peralte, p , valdrá:

$$p = a \times \frac{v^2}{g R} ;$$

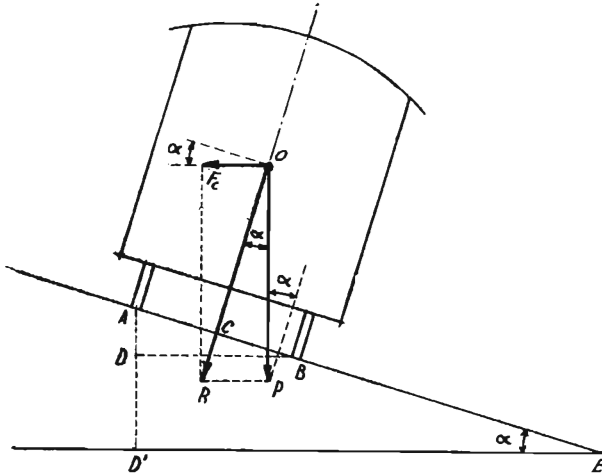


Figura 55.

si V se expresa en kilómetros por hora,

$$v = \frac{V}{3,6} ;$$

$$p = \frac{a V^2}{3,6^2 \times 9,81 \times R} ;$$

en algunas líneas francesas (P. L. M., por ejemplo), emplean para el peralte la fórmula:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{V_{\text{máx}}}{R} ;$$

donde $V_{\text{máx}}$ es la mayor velocidad permitida en la curva; esta fórmula da peraltes pequeños para altas velocidades y, por ello, se emplea para $V_{\text{máx}} \leq 77$ Km./hora; con velocidades mayores, se utiliza la fórmula corregida:

$$p = 1,6 \times \frac{V_{\text{máx}} - 45}{R};$$

V está expresado en Km. por hora; R y p , en metros.

Si todos los trenes circularan a la velocidad de cálculo, el problema estaría perfectamente resuelto, pero no es así: existen, generalmente, grandes diferencias de velocidad de régimen que hacen, si el peralte se calcula para la velocidad máxima, que con los trenes lentos trabaje excesivamente el carril interior; y si calculamos, por el contrario, el peralte para velocidad mínima, para la máxima, el carril exterior trabajará con exceso. Por ello, en la práctica, se calculan, para una velocidad media fijada por la fórmula:

$$V = \frac{2}{3} \times V_{\text{máx}} + 5 \text{ Km.}$$

59. Limitación de la velocidad en función del radio de las curvas. — En la práctica, se admite:

800 m. de radio mínimo, velocidad máxima...	130 Km./h.
500 " " " " " ...	95 a 100 Km./h.
300 " " " " " ...	70 a 80 "

estas velocidades están aproximadamente dadas por la fórmula:

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{22 R_{\text{mín}} - 3000}.$$

No se debe bajar en las curvas de ferrocarriles del radio de 300 metros y nunca del de 200 m., si se quiere conservar una velocidad de régimen aceptable.