CAPÍTULO VIII

Obras de tierras.

Las obras de tierras son, frecuentemente, la partida mayor del presupuesto de un camino. Su estudio detenido es de importancia fundamental. Al formar los desmontes o terraplenes, se ocupa una superficie del terreno natural que hay que expropiar; a veces, hay que revestir, y siempre conservar, los taludes de los desmontes y terraplenes; por último, es preciso conocer el volumen de tierras que, en una u otra forma, se tienen que mover para proyectar exactamente el plan de realización y formular el presupuesto. Hay que determinar, por tanto:

1.º El ancho y la superficie de la zona ocupada por el movimiento de tierras.

2.º La superficie de los taludes del desmonte o terraplén; y

3.º El volumen del movimiento de tierras, desmonte y terraplén y distancia media del transporte.

114. Ancho y superficie de la zona ocupada. — El ancho y superficie de la zona ocupada, depende de la cota roja de desmonte o terraplén y de la inclinación de los taludes de las tierras. El método corrientemente empleado para la determinación del ancho de la zona ocupada, es el método gráfico: dibujados los perfiles transversales del camino, se puede, en cada uno de ellos, medir el ancho de la zona ocupada; este método es el único que es posible utilizar en la mayoría de los casos, pues el perfil transversal del terreno es, normalmente, una línea irregular y, por tanto, el cálculo analítico es imposible o muy fatigoso; cuando el perfil del terreno está formado por una o varias rectas, se puede calcular analíticamente el ancho de la explanación; pero no parece lógico hacerlo así para unos perfiles transversales y, en cambio, en otros medirlo gráficamente, y sería un caso muy especial, un camino en el cual fuese posible el cálculo analítico del ancho de ocupación de todos los perfiles transversales del mismo; por otra parte, la precisión que por el método gráfico se obtiene es más que sobrada, y el ahorro de tiempo, muy grande.

El cálculo analítico, cuando es posible, no presenta dificultad alguna; con las notaciones de la figura 112, en el caso de un perfil transversal del terreno formado por dos pendientes transversales, tendremos:

$$e = e' + e''$$

$$e' = l + \frac{A\,A'}{i} = l + \frac{y + e'\,t'}{i} \;;\; e' = \frac{y + l\,i}{i - t'} \;;\; e'' = l + \frac{BB'}{i} = l + \frac{y - e''\,t''}{i} \;;$$

$$e'' = \frac{y + l\,i}{l + t''} \;;\; e = \frac{y + l\,i}{i - t'} + \frac{y + l\,i}{l + t''} \,.$$

Analógamente, se podría calcular otro caso cualquiera, siempre que

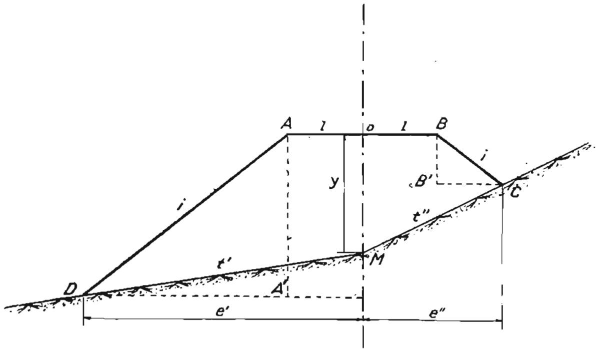

Figura 112.

el perfil transversal del terreno estuviera formado por una poligonal de pendientes conocidas.

En un perfil a media ladera, se tendrá (fig. 113):

$$e = e' + e'' = \frac{l_t\ i_t - y}{l_t - t'} + \frac{l_d\ i_d + y}{i_d - t''} \,.$$

115. Area de ocupación. — Determinados los anchos de ocupación de los distintos perfiles transversales y conocidas las distancias entre ellos, se determinan fácilmente las áreas de ocupación; entre dos perfiles consecutivos, serán trapecios que tengan por base los anchos de ocupación de los dos perfiles considerados y por altura la distancia entre ellos; si d es la distancia, y e_1 y e_2, sus anchos correspondientes de ocupación, el área será:

$$A = \frac{e_1 + e_2}{2} \times d \,.$$

Normalmente, el procedimiento que se emplea es el siguiente: se dibujan los perfiles transversales del camino, que luego han de servir para determinar los volúmenes del movimiento de tierras; estos perfiles se habrán obtenido en todos aquellos puntos en los cuales el terreno ofrece una variación brusca y, desde luego, a distancias no mayores de las mínimas que en cada caso se han señalado; el dibujo se hace en escala de 1/100 ó 1/200, con toda exactitud, y en él se puede medir rápidamente el ancho de ocupación en cada perfil. Hecho esto, por la

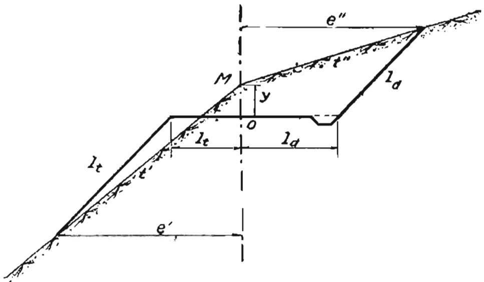

Figura 113.

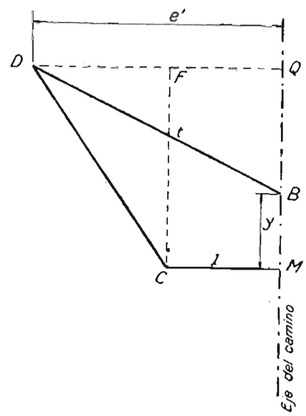

Figura 114.

fórmula anterior se obtiene el área entre dos consecutivos, y por suma de ellas, la total.

116. Area de los taludes. — Es interesante su cálculo cuando se trata de proyectar obras de revestimiento o defensa. Para hacerlo es preciso medir la longitud de los taludes en cada uno de los perfiles transversales dibujados; se pueden también calcular por el siguiente procedimiento: supongamos se trata del perfil de la figura 114. Tendremos, con las notaciones indicadas:

$$CD = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{FC}^2},$$

$$DF = e' - l; \; FC = e't + y = (e' - l)i;$$

de donde:

$$e' = \frac{y + li}{i - t};$$

sustituyendo

$$CD = \sqrt{(e' - l)^2 + (e' - l)^2 i^2} = (e' - l)\sqrt{1 + i^2},$$

y sustituyendo, en vez de e', su valor,

$$CD = \left(\frac{y + li}{i - t} - l\right)\sqrt{1 + i^2}.$$

Determinadas gráfica o analíticamente las longitudes de los taludes, las áreas se obtienen fácilmente; entre dos secciones consecutivas, será la de un trapecio que tiene por bases las longitudes de taludes correspondientes y por altura la distancia entre los dos perfiles. Cuando se pasa de desmonte a terraplén, habrá un punto de longitud nula de talud, al cual habrá que referir las áreas de las dos secciones consecutivas, sustituyendo el área del trapecio por las áreas de los dos triángulos. En el caso de un tramo de camino en curva, las áreas de los taludes pueden asimilarse a dos troncos de cono, que tienen por bases, respectivamente, el círculo del camino y el de intersección del talud con el terreno, tanto en la parte interna como en la externa. La intersección del talud con el terreno no es exactamente un círculo, ni la superficie reglada que tiene por directrices ambas curvas un cono, pues las generatices no pasan todas por un punto; pero, en la práctica, se obtiene con esta hipótesis la suficiente aproximación.

117. Determinación de las áreas de los perfiles transversales. Dibujados los perfiles transversales del camino en escala adecuada —normalmente 1/200 a 1/100—, hay que proceder a la medida de sus áreas para determinar los volúmenes del movimiento de tierras. Esta partida casi siempre es la de mayor importancia en el presupusto de la obra y, por tanto, es fundamental su correcta determinación. El grado de exactitud preciso varía, según sea el fin del proyecto que se está realizando; no se necesita la misma exactitud en el caso de un anteproyecto que en el caso de un proyecto de replanteo o de una liquidación; y no será lógico perder el tiempo en una determinación exacta, si la exactitud no es necesaria.

La determinación de las áreas puede hacerse por tres procedimientos: analíticamente, gráficamente o por medio del planímetro. Normalmente, se emplea el método del planímetro; si se dispone de este aparato, es sistema rápido y lo suficientemente exacto. Tiene el inconveniente de que no existe más comprobación que la repetición de la operación. Para anteproyectos y proyectos, es la forma corriente de operar.

Aproximación similar tiene el procedimiento gráfico, que es más lento que la medición con planímetro; no tiene, como el método anterior, más comprobación que la repetición de la operación.

Cuando se desea una gran exactitud, por ejemplo, para proyectos de replanteo y para liquidaciones, puede emplearse el procedimiento analítico; es lento y trabajoso, pero, aparte de una mayor exactitud, tiene la ventaja de ser fácil su comprobación por cualquiera de los métodos anteriores.

118. Cálculo analítico. — Terreno de pendiente uniforme. — Con las notaciones de la figura 115 tenemos:

Area $A\,B\,C\,D =$ Area triángulo $V\,D\,C$ — Area triángulo $V\,A\,B$;

Triángulo $V\,D\,C =$ Triángulo $V\,M\,D +$ Triángulo $V\,M\,C$;

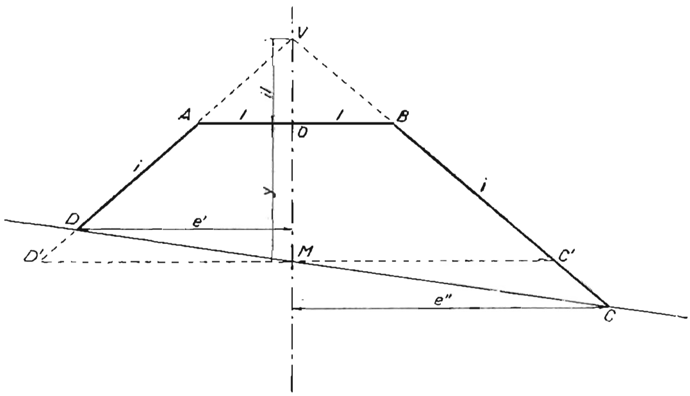

Figura 115.

estos dos triángulos tienen la misma base $V\,M$, y por alturas los semianchos de ocupación e' y e'':

$$\text{Area } V\,D\,C = (y + i\,l)\,\frac{e' + e''}{2} = \frac{i}{i^2 - t^2}\,(y + i\,l)^2;$$

teniendo en cuenta los valores de e' y e'' determinados anteriormente. Como área $VAB = i\,l^2$, el área buscada será

$$\text{Area } A\,B\,C\,D = \frac{i(y + i\,l)^2}{i^2 - t^2} - i\,l^2 = A. \qquad [1]$$

En el caso de una sección en trinchera será necesario añadir a la sección del desmonte, la correspondiente de las dos cunetas.

El cuadrilátero de área $ABCD$ se puede sustituir por el $ABC'D'$, formado trazando la paralela $C'D'$ a AB. En este caso el error absoluto cometido es la diferencia entre el valor de A obtenido por la [1] y el valor A_h de la misma fórmula, haciendo $t = 0$, o sea que el error Δ será:

$$\Delta = \frac{i(y + i\,l)^2}{i^2 - t^2} - i\,l^2 - \frac{(y + i\,l)^2}{i} + i\,l^2 = \frac{t^2(y + i\,l)^2}{i(i^2 - t^2)};$$

la relación $\frac{\Delta}{A}$ nos dará el error relativo cometido:

$$\frac{\Delta}{A} = \frac{t^2}{i^2 - i^2\,l^2\,\dfrac{i^2 - t^2}{(y + i\,l)^2}}, \qquad [2]$$

cuando t no es muy grande, y en cambio y tiene un cierto valor, el de $\frac{\Delta}{A}$ es lo suficientemente pequeño para que pueda despreciarse. Se puede admitir un error hasta de un 10 por 100 para proyectos corrientes, en los cuales los perfiles transversales se obtienen de un plano con curvas de nivel; señalado el límite de error admisible para un valor de t, la fórmula [2] da el menor valor de y, por bajo del cual no será posible hacer la sustitución del trapecio; se pueden obtener una serie de valores de y, para cada valor de t, que sirvan para fijar los límites mínimos de y, por encima de los cuales se puede hacer la sustitución.

Si la superficie del terreno no es una línea uniforme, sino una línea poligonal con pendientes diferentes t_1, t_2, t_3, etc., se levantan por los puntos donde las pendientes se cambian, líneas verticales que dividirán el área total, en trapecios y triángulos, cuyas áreas parciales será sencillo determinar.

119. Método gráfico de Garceau. — Consiste en reducir el polígono del perfil transversal a un triángulo rectángulo de base determinada; sea $OBCM$ (fig. 116) el semiperfil de un terraplén. Si unimos B con M y por C trazamos la paralela CE a BM, el triángulo OBE será equivalente al cuadrilátero $OBCM$, puesto que el triángulo OBM es común y las dos BMC y MBE son equivalentes, puesto que tienen la misma base y la misma altura. La línea EO, medida en la base OB nos dará el doble del área del trapecio. Si queremos medir el área en otra base b que no sea la OB, no tenemos más que tomar (fig. 117) OB', igual a $2\,b$, unir B' con E y trazar por B una paralela BE' a $B'E$; OE' nos medirá en la base b el área del triángulo.

120. Método gráfico de Guidi. — El área ABC_1D_1 es la diferencia entre las VD_1C_1 y VAB. En dos ejes octogonales (fig. 117, *a*) se toman $OH_1 = h_1$ y $O\beta_1 = D_1C_1$; el triángulo $OH_1\beta_1$ será equivalente al VD_1C_1; si se quiere tener la representación gráfica de su área en una base b, se toma $OB_1 = 2\,b$, se une B_1 con β_1, y por H_1 se traza una recta $H_1\,K_1$, paralela a $B_1\,\beta_1$; OK_1 será el valor del área del triángulo VD_1C en la base b. Análogamente, se determina OK, valor del área

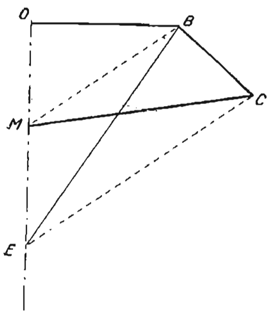

Figura 116.

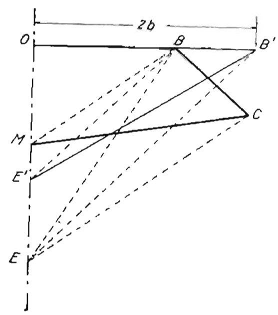

Figura 117.

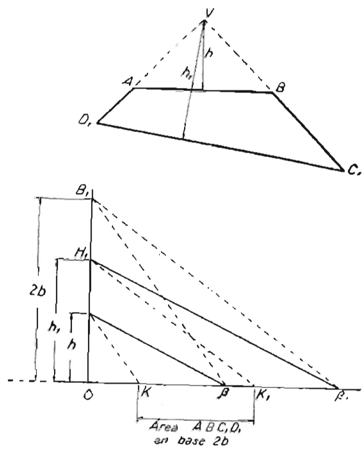

Figura 117 *a*.

AVB en la base b; KK_1, diferencia de las dos áreas será la del cuadrilátero en la base b.

121. Método del planímetro. — Cuando se dispone de un planímetro, la medida con él de las áreas es el método más rápido, y, en definitiva, suficientemente exacto la mayoría de las veces; operando con cuidado y repitiendo las mediciones, con recorrido de la aguja del planímetro en uno y otro sentido, se tiene una seguridad suficiente, sobre todo para el estudio de proyectos.

122. Determinación del volumen de tierras a mover. — Determinadas las áreas de las diferentes secciones transversales por cualquiera de los métodos antes indicados, vamos a estudiar cómo se determina el volumen de tierras a mover. Consideraremos en primer lugar el caso de un tramo en recta, todo en desmonte o todo en terraplén.

123. Método exacto. — Fórmula del prismoide. — Se llama prismoide al sólido limitado por dos caras planas y paralelas de forma cualquiera, llamadas bases, y por una superficie reglada, engendrada por una recta que se apoya en ambas.

El volumen del prismoide viene dado por la fórmula:

$$V = \frac{d}{6} (\Omega_1 + \Omega_2 + 4 \Omega_m),$$

en la cual d es la distancia entre las bases, o altura del prismoide, y Ω_1, Ω_2 y Ω_m las áreas de las dos bases y de la sección media.

La sección del sólido del camino comprendida entre dos perfiles transversales, podemos asimilarla a un prismoide; esta hipótesis no es totalmente exacta; las dos bases del prismoide son los dos perfiles trans-

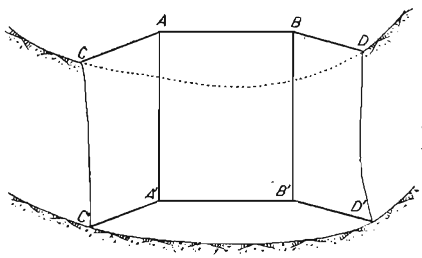

Figura 118.

versales considerados; la superficie del camino y los taludes son superficies engendradas por una recta que se apoye en las bases, pero la superficie del terreno no es una superficie reglada, sino, en general, irregular; no obstante, si hemos trazado los perfiles transversales, con arreglo al criterio expuesto, en tal forma que el terreno entre dos conscutivos sea lo suficientemente regular, se puede considerar (fig. 118) la cara $CDC'D'$ como engendrada por una recta que se apoya en las líneas CD y $C'D'$; en este caso, la fórmula es exacta.

124. Fórmula de la media de las secciones extremas. — En el caso de que las generatrices del prismoide sean paralelas a un plano director, la sección media es igual a la media de las secciones extremas; es decir:

$$\Omega_m = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2},$$

y el volumen del prismoide valdrá:

$$V = \frac{d}{6}\left(\Omega_1 + \Omega_2 + 2\,\Omega_1 + 2\,\Omega_2\right) = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\,d,$$

fórmula más simple que la del prismoide, pues no obliga a calcular el área de la sección media, Ω_m; es la que corrientemente se emplea, ya que si el terreno es lo suficientemente regular entre las dos secciones consideradas, sin error apreciable puede admitirse la hipótesis de existencia de un plano director.

El error cometido aplicando esta fórmula en lugar de la del prismoide, será:

$$\Delta_1 = \frac{d}{2}\left(\Omega_1 + \Omega_2\right) - \frac{d}{6}\left(\Omega_1 + \Omega_2 + 4\,\Omega_m\right) = \frac{d}{3}\left(\Omega_1 + \Omega_2 - 2\,\Omega_m\right),$$

que será positivo o negativo, según el signo de $\Omega_1 + \Omega_2 - 2\,\Omega_m$; o sea

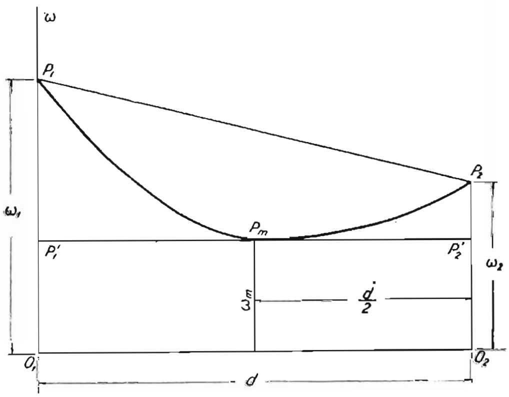

Figura 119.

según la sección media, Ω_m, sea mayor o menor que la media de las secciones extremas,

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}.$$

En el prismoide, el área de una sección paralela a la base es función algebraica, racional y entera de segundo grado, de su distancia a la base; es decir que

$$\Omega = \alpha + \beta\,z + \gamma\,z^2;$$

siendo α, β y γ independientes de z.

Si tomamos las z en el eje horizontal y las áreas Ω en uno vertical, la expresión anterior es una parábola $P_1\ P_m\ P_2$ (fig. 119); esta curva es la *curva de las áreas,* y la comprendida entre ella y el eje de las Z será el volumen del prismoide. Al considerar la fórmula de la media de las secciones extremas, lo que hemos hecho ha sido, en definitiva, suponer una variación lineal de las áreas; es decir, sustituir la parábola $P_1\ P_m\ P_2$ por la recta $P_1 P_2$; el error que al hacerlo así se comete en el volumen, viene representado por el segmento parabólico $P_1\ P_m\ P_2$, que será positivo o negativo, según la concavidad de la parábola vaya dirigida al eje o hacia arriba.

125. Fórmula de la sección media. — Por esta fórmula se calcula el volumen del prismoide, multiplicando el área de la sección media, Ω_m, por la distancia entre perfiles extremos, o sea:

$$V = d\,\Omega_m\,.$$

El error cometido, en relación con la fórmula del prismoide, vale:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\,(\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_m) = -\,\frac{\Delta_1}{2}\,,$$

o sea, que el error cometido al aplicar la fórmula de la sección media es la mitad y de signo contrario al cometido con la fórmula de la media de las secciones extremas. El error será positivo o negativo, según el signo de la cantidad encerrada dentro del paréntesis.

La fórmula de la sección media es más aproximada que la de la media de las secciones extremas. Sin embargo, corrientemente, es esta última la que se emplea.

El cálculo del volumen de tierras a mover, por cualquiera de los dos procedimientos aproximados, da suficiente exactitud, siempre y cuando la distancia entre las dos secciones transversales sea tal, que la diferencia de cotas rojas y anchos de ocupación no sea excesiva. Si los perfiles transversales se escogen con este criterio y si se tiene en cuenta que el error en unos casos es positivo y en otros negativo, es decir, que prácticamente en el total del trazado se compensan en gran parte los errores parciales, la cubicación por el método aproximado de la media de las secciones o de la sección media, da resultados suficientemente aproximados.

126. Volumen entre dos perfiles, uno en desmonte y otro en terraplén. — En el caso de que los perfiles consecutivos que se consideran sea uno en desmonte y el otro en terraplén, el sólido se denomina sólido de paso.

Supongamos dos secciones, $ABCD$, $EFGH$ (fig. 120), una en desmonte y otra en terraplén, y supongamos que el terreno sea una superficie reglada engendrada por rectas paralelas a un plano vertical que pasa por el eje del camino y que tenga por directrices las dos curvas, DC y HG, de intersección con el terreno de los perfiles transversales extremos. La intersección de la superficie del terreno con el plano de la explanación será una curva QPR, que puede determinarse fácilmente por puntos; si

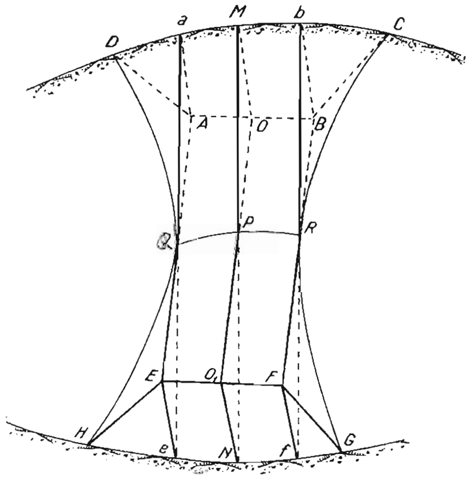

Figura 120.

por el eje OPO_1 del camino se traza un plano vertical, cortará a la supuesta superficie del terreno según una generatriz, MN, y a los perfiles extremos según dos rectas, MO, NO_1, cotas rojas de ambos perfiles; los dos triángulos, MOP y PO_1N, son semejantes, y se puede escribir:

$$\frac{OP}{PO_1} = \frac{MO}{NO_1}; \quad \frac{OP + PO_1}{PO_1} = \frac{MO + NO_1}{NO_1}; \quad \frac{OO_1}{PO_1} = \frac{MO + NO_1}{NO_1},$$

de cuya ecuación puede deducirse PO_1 en función de cantidades todas ellas conocidas; análogamente, cortando por planos paralelos al anterior, se pueden determinar cuantos puntos se deseen de la curva de intersección del terreno, con el plano de la plataforma del camino. La curva de paso puede determinarse también gráficamente, utilizando los procedimientos de geometría descriptiva. La intersección de los taludes del camino con el terreno serán curvas DQ, QH, CR y RG. Trazando planos verticales por AE y BF, tendremos el sólido total dividido en sólidos parciales $AaDQ$, $QEcH$, $QAaMOP$, $QEcPO_1N$, $POMbBR$, PO_1NFfR, $BbCR$, $FfRG$, unos con forma piramidal y otros prismática; ninguno es prismoide, y la determinación de sus volúmenes es complicada; en la práctica, se utiliza, en vez de este procedimiento exacto, el aproximado, consistente en sustituir la curva del paso por una línea recta, normal al eje del camino y situada a una distancia proporcional a las áreas de las secciones extremas; si llamamos d_1 y d_2 a las distancias parciales desde las secciones extremas al punto de paso, D y T, a las áreas de desmonte y terraplén, se tendrá:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{T}{D}; \quad \frac{d_1 + d_2}{d_2} = \frac{D + T}{D}; \quad \frac{d}{d_2} = \frac{D + T}{D}$$

$$\frac{d_1}{d_1 + d_2} = \frac{T}{D + T}. \quad \frac{d_1}{d} = \frac{T}{D + T};$$

de donde:

$$d_1 = d\,\frac{T}{D + T};$$

$$d_2 = d\,\frac{D}{D + T};$$

siendo, como siempre, d la distancia entre los dos perfiles considerados.

La recta del paso se puede considerar como un perfil ficticio de área nula, y aplicando la fórmula de la media de las áreas, tendremos:

$$\begin{aligned} V_t &= d_1\,\frac{T + O}{2} = d_1\,\frac{T}{2} \\ V_d &= d_2\,\frac{D + O}{2} = d_2\,\frac{D}{2}, \end{aligned} \qquad [1]$$

y sustituyendo los valores de las distancias parciales d_1 y d_2:

$$V_d = \frac{d}{2} \times \frac{D^2}{D + T}$$

$$V_t = \frac{d}{2} \times \frac{T^2}{D + T}.$$

La fórmula [1] demuestra que los volúmenes de desmonte y terraplén están representados por las áreas de triángulos rectángulos que tienen por base las áreas respectivas de desmonte y terraplén y por altura las distancias al punto de paso; por tanto, si por los extremos de una recta, $AB = d$ (fig. 121), levantamos dos perpendiculares, AC y BD, que en una escala determinada representan las áreas de desmonte y terra-

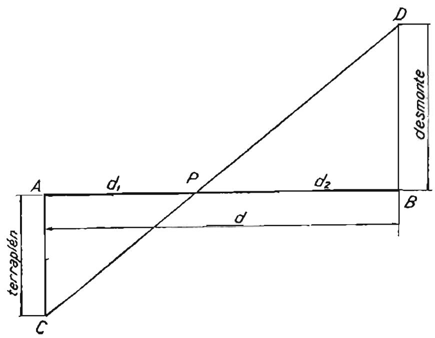

Figura 121.

plén (llevando una hacia arriba y la otra hacia abajo) y unimos los puntos C y D, el punto P será el punto de la línea de paso.

Cuando los dos perfiles considerados sean perfiles mixtos de desmonte y terraplén, si los puntos de paso de las dos secciones están en una recta paralela al eje del camino, los volúmenes respectivos de desmonte y terraplén serán (fig. 122, *a*):

$$V_t = \frac{T + T_1}{2}\, d; \qquad V_d = \frac{D + D_1}{2}\, d.$$

Si el punto de paso no estuviese en una recta paralela al eje (figura 122, *b*) se imaginan trazados planos paralelos al vertical que pasa por

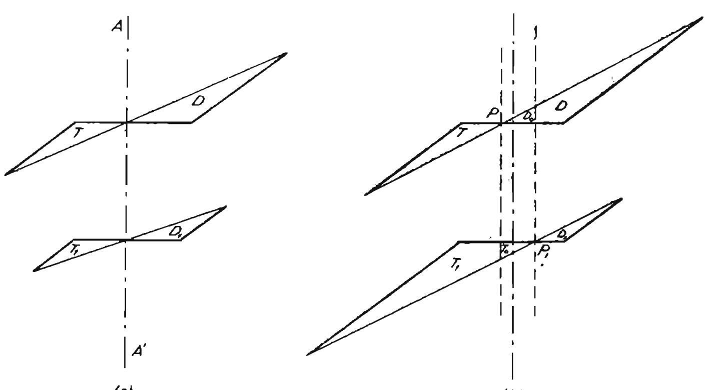

Figura 122.

el eje y por los puntos P y P_1; el volumen buscado se descompone en una parte formada por dos terraplenes, T y T_1, y otra de desmonte, D_0, y terraplén, T_0, y, por último, una formada por dos desmontes, D y D_1; aplicando las fórmulas respectivas, tendremos:

$$V_t = \frac{d}{2}(T + T_1) + \frac{d}{2} \times \frac{T_0^2}{T_0 + D_0} = \frac{d}{2}\left(T + T_1 + \frac{T_0^2}{T_0 + D_0}\right)$$

$$V_d = \frac{d}{2}(D + D_1) + \frac{d}{2} \times \frac{D_0^2}{T_0 + D_0} = \frac{d}{2}\left(D + D_1 + \frac{D_0^2}{T_0 + D_0}\right);$$

y, por último, si se tiene una sección mixta y la otra toda en desmonte o terraplén, trazando un plano paralelo al vertical que pasa por el eje, por el punto de paso de la sección mixta se tendrá una sección en la que los perfiles extremos son ambos desmonte o terraplén, y la otra mitad, mixta de desmonte y terraplén; aplicando las fórmulas correspondientes, tendremos:

$$V_t = \frac{d}{2} \times \left(T + T_1 + \frac{T_2^2}{T_2 + D}\right)$$

$$V_d = \frac{d}{2} \times \frac{D^2}{D + T_2}.$$

127. Cálculo del volumen de tierras cuando el eje del camino es una curva. — Según el teorema de GULDINO, una superficie de área Ω que sufre un desplazamiento infinitesimal de modo que su centro de gravedad recorra un espacio dl en una dirección que forma un ángulo φ con la normal a Ω, engendra un volumen $\Omega\, dl \cos \varphi$. En el caso de que la curva descrita por el centro de gravedad de la sección sea circular, $\varphi = 0$ y $\cos \varphi = 1$; luego el volumen engendrado valdrá $\Omega\, dl$, y el total será $\Omega \times l$.

Normalmente, las secciones del camino no son constantes, sino que varían según cierta ley; entonces, en la práctica, puede aplicarse la fórmula anterior, sustituyendo las dos secciones extremas, Ω_1 y Ω_2, por la sección media

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \Omega_m,$$

y la fórmula del volumen será:

$$V = l\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2};$$

l es la longitud de la curva descrita por los centros de gravedad de las secciones; si llamamos R al radio del círculo del eje del camino; a, a la distancia horizontal del eje del camino al centro de gravedad de la sección media, y d, al desarrollo del círculo entre las secciones extremas, tendremos:

$$l = (R \pm a)\alpha;$$

siendo α el ángulo en el centro, que vale $\alpha = \frac{d}{R}$; luego

$$l = (R \pm a)\frac{d}{R} = d\left(1 \pm \frac{a}{R}\right);$$

si no se conoce la distancia a, del centro de gravedad de la sección media, al círculo, sino solamente las a_1, a_2 de las secciones extremas, y éstas están lo suficientemente próximas, se puede aceptar sin gran error:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

y, por tanto,

$$l = d\left(1 \pm \frac{a_1 + a_2}{2R}\right).$$

Cuando el radio de la curva es grande, la distancia entre secciones, pequeña, y el terreno no excesivamente accidentado, las distancias a_1 y a_2 son muy pequeñas con relación a R, y, por tanto, el segundo miembro se puede despreciar, y tendremos:

$$l = d.$$

128. Métodos aproximados. — En el cálculo de los anteproyectos, no es preciso dibujar todos los perfiles transversales y efectuar su cubicación; los perfiles se obtienen de los planos y no son de gran exactitud; además, en el proyecto de replanteo, generalmente, se modifica algo el trazado, y, por tanto, los perfiles transversales. En la práctica, es suficiente, por esta razón, el empleo de métodos aproximados que den una idea suficiente del volumen de tierras a mover. Para la comparación de los distintos trazados y su movimiento de tierras, basta con el examen del perfil longitudinal. La valoración aproximada del volumen de tierras a mover, se suele realizar por uno de los métodos siguientes:

a) Método de las secciones equidistantes.
b) Método de la cota roja media.
c) Método de BOULANGIER o del momento estático.

129. Método de las secciones equidistantes. — Supongamos se trate de calcular el volumen de tierras entre dos puntos de paso; por tanto, todo desmonte o todo terraplén. Y que se han obtenido los perfiles transversales a distancia constante, d, y sean Ω_1, Ω_2, ... Ω_m sus áreas respectivas; el volumen valdrá:

$$V = d\,\frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2} + d\,\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} + \ldots d\,\frac{\Omega_{m-1} + \Omega_n}{2} = d\left[\frac{\Omega_0 + \Omega_n}{2} + \Sigma_1^{n-1}\Omega\right].$$

Si en la fórmula del área de una sección cualquiera,

$$\Omega_p = \frac{i\,(y_p + i\,l)^2}{i^2 - t^2} - i\,l^2 \text{ (pág. 185)},$$

hacemos $t = 0$, es decir, suponemos el terreno horizontal, y tendremos:

$$\Omega_p = \frac{(y_p + i\,l)^2}{i} - i\,l^2 = y_p\left(\frac{y_p}{i} + 2\,l\right);$$

sustituyendo, resulta:

$$V = d\left[\frac{\left(\frac{y_p}{i} + 2\,l\right)y_0 + \left(\frac{y_n}{i} + 2\,l\right)y_n}{2} + \Sigma_1^{n-1}\left(\frac{y}{i} + 2\,l\right)y\right] =$$

$$= d\left[2\,l\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \Sigma_1^{n-1}\,y\right) + \frac{1}{i}\left(\frac{y_0^2 + y_n^2}{2} + \Sigma_1^{n-1}\,y^2\right)\right],$$

como la sección es entre dos puntos de paso, $y_0 = y_n = 0$ y, por tanto,

$$V = d\left[2\,l\,\Sigma_1^{n-1}\,y + \frac{1}{i}\,\Sigma_1^{n-1}\,y^2\right].$$

130. Método de la cota roja media. — Gráfica o numéricamente se determina la cota media y_m del trozo de perfil considerado, todo en desmonte o todo en terraplén; siendo L la longitud del eje del trozo considerado, se tiene:

$$L\,y_m = S,$$

donde S es el área de la superficie PMQ (fig. 123).

Suponiendo que el terreno sea horizontal en el sentido perpendicular al trazado, la sección de cota roja y_m valdrá:

$$\Omega_m = y_m \left(\frac{y_m}{i} + 2l\right),$$

según hemos deducido en el método anterior; el volumen del sólido del

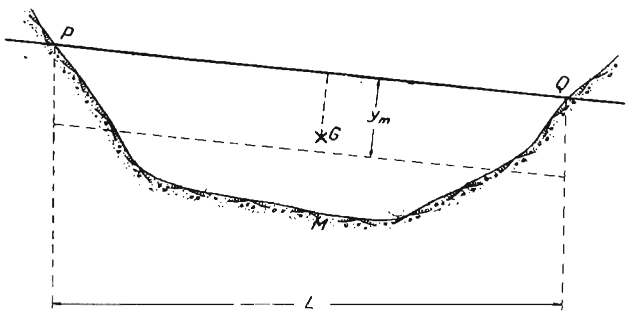

Figura 123.

camino entre los perfiles considerados, calculado como un prisma que tenga por base la sección media y por altura L, valdrá:

$$V = L\left(2\,l + \frac{y_m}{i}\right) y_m = S\left(2\,l + \frac{y_m}{i}\right),$$

puesto que $L\ y_m = S$.

131. Fórmula del centro de gravedad. — Si una sección cualquiera vale

$$\left(2\,l + \frac{y}{i}\right) y$$

el volumen comprendido entre dos secciones infinitamente próximas, valdrá el área de esta sección por $d\,x$, y el volumen total:

$$V = \int_0^L \left(2\,l + \frac{y}{i}\right) \times y \times d\,x = 2\,l \int_0^L y\,d\,x + \frac{2}{i} \int_0^L y\,d\,x \times \frac{y}{2};$$

ahora bien:

$$\int_0^L y\,d\,x = S \quad \text{y} \quad \int_0^L y\,d\,x\,\frac{y}{2}$$

es el momento estático del área PMQ con relación a la recta PQ (figura 123); si llamamos g a la distancia del centro de gravedad del área, S a la recta PQ,

$$\int_0^L y\,dx \times \frac{y}{2} = g\,S,$$

y el volumen valdrá:

$$V = 2\,l\,S + \frac{2}{i}\,g\,S = S\left(2\,l + \frac{2}{i}\,g\right);$$

esta fórmula coincide con el procedimiento anterior cuando

$$g = \frac{y_m}{2}.$$

Los resultados obtenidos por este procedimiento, mucho más racional que el anterior, son más exactos; tiene en cambio el inconveniente de que el cálculo de g es, en general, pesado; por esta causa, para tanteos, se prefiere el método anterior.

132. Curva de las áreas. — Representación gráfica de los volúmenes. — La fórmula de la media de las áreas,

$$V = d\,.\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2},$$

da la posibilidad de utilizar un método gráfico de representación de los volúmenes que permite calcular muy fácilmente las tierras que, económicamente, se pueden mover de una zona a otra y calcular su distancia de transporte.

Sean una serie de secciones transversales del camino (fig. 124) 1, 2, ..., 6; sus áreas de desmonte y terraplén las descomponemos en la forma que en la figura se indica, con objeto de poder, de acuerdo con lo expuesto al tratar de la cubicación de tierras, hacer la determinación de las líneas de paso, en el caso de tramos mixtos de desmonte a terraplén; se toma una escala gráfica para representar las áreas y un eje cualquiera, conviniendo representar hacia arriba, por ejemplo, las áreas de desmonte y hacia abajo las áreas de terraplén. Sobre el eje AB se fijan los puntos 1, 2, 3, ..., 6, siendo las distancias 1-2, 2-3, 3-4, ..., las distancias d correspondientes entre los indicados perfiles; en el punto *1* se levanta una perpendicular 1-(16), que tenga por longitud los 16 m. cuadrados de perfil *1* en la escala elegida; en el punto *2*, y sobre la vertical correspondiente, se lleva la longitud 2-(10), que representa el área de 10 metros cuadrados del perfil 2; el área del trapecio 1-2-(10)-(16) representará, evidentemente, el volumen de tierras comprendido entre los perfiles 1 y 2. En la vertical 2 se llevan hasta (2) y (8) las áreas de

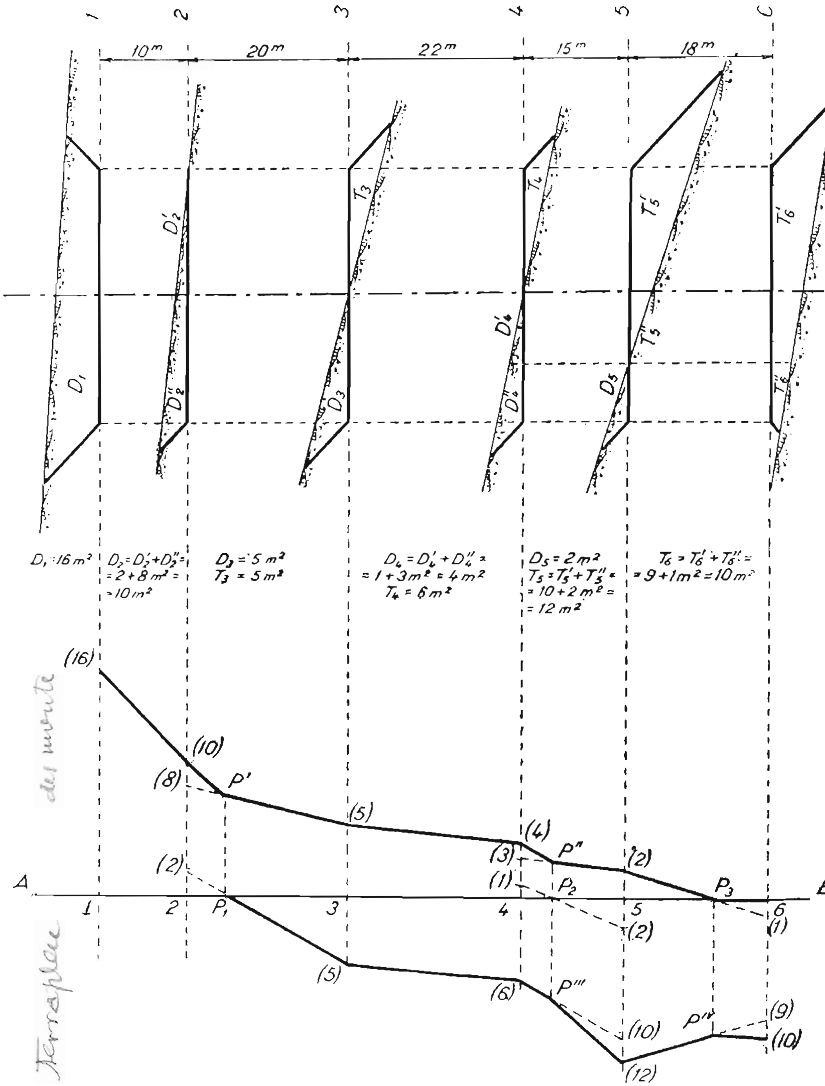

Figura 124.

2 y 8 metros cuadrados, en que se descompone el perfil 2, por el eje del camino. En la vertical de 3 se llevan hacia arriba los 5 metros cuadrados del desmonte D_3, y hacia abajo los 5 metros cuadrados del terraplén T_3;

el punto de paso entre el desmonte D'_2 y el terraplén T_3 es P_1, obtenido uniendo (2) con (5); el área 2-(10)-P'-(5)-3-2 representa el volumen de desmonte comprendido entre las secciones 2 y 3; el área P_1-3-(5'), el del terraplén entre las mismas secciones. En la vertical de 4 llevamos la magnitud 4-(4) $= D'_4 + D''_4$, y en 4-(6) la magnitud correspondiente a $T_4 = 6$ m.^{2} de terraplén; en la vertical de 4 llevamos asimismo las dos áreas de desmonte en que descomponemos la total 4-(3) $= D''_4$ y 4-(1) $= D'_4$; en la vertical de 5 llevamos 5-(2) $= D_5$ y unimos el punto (3) con el (2); el punto de paso del desmonte D'_4 al terraplén T''_5 se determina uniendo el punto (1) de la vertical 4 con el (2) de la 5; se unen los puntos (10), representativos del desmonte T'_5 con (6) de la vertical 4, y el punto P''' con el (12) de la vertical 5, representativo de $T'_5 + T''_5$; el área 4-(4)-P''-(2)-5 y la 4-(6) P'''-(12)-(5), representan, respectivamente, los volúmenes de desmonte y terraplén entre las secciones 4 y 5; por último, sobre la vertical de (6) se toma 6-(10) $= T_6$, 6-(1) $= T''_6$ y (6)-9 $= T'_6$; el punto de paso de D_5 a T''_6 será P_3; las áreas 5-(2)-P_3 y 5-(12)-P^{IV}-(10)-6 representarán los volúmenes de desmonte y terraplén entre las secciones 5 y 6. Con las sencillas construcciones indicadas, podemos tener unas líneas que, con los ejes elegidos, representan las áreas correspondientes de desmonte y terraplén. Este perfil, llamado perfil de las áreas, tiene una gran utilidad en el estudio de la distribución de las tierras de la excavación y la económica compensación de los desmontes con los terraplenes.

133. Compensación transversal y longitudinal de tierras. — La máxima economía de la obra exige que las sumas de los costes de excavación y transporte de tierras sea un mínimo. Si los volúmenes de desmonte y terraplenes de una obra fuesen exactamente los mismos, y la distancia a que hubiera que transportar la tierra de los desmontes para la formación de terraplenes no fuese excesiva para que el transporte resultase económico, es evidente que la utilización de la tierra de la obra, en la obra misma, sería lo más conveniente. Esto no sucede en general; aunque al hacer el estudio de las rasantes de un camino, se procure, entre otras cosas, tener un *perfil compensado*, es muy difícil llegar a lograrlo. Cuando sobran tierras, éstas han de transportarse a depósitos fuera del camino, que se denominan "caballeros"; cuando faltan, es preciso excavar tierra, con el único fin de utilizarlas en la formación de terraplenes; se dice entonces que es preciso tomar tierra de "préstamos".

La compensación más elemental y económica es la compensación transversal; si se tiene un trazado a media ladera, la tierra del desmonte, con pala o, como máximo — si la explanación es muy ancha —, con carretilla, se puede llevar a formar los terraplenes; la distancia de transporte es mínima.

La valoración de la compensación transversal de un camino puede hacerse muy fácilmente, utilizando la curva de las áreas; en la figura 125 se ve la forma de llevarla a cabo. Hecha la compensación transversal, resulta un volumen de tierras sobrantes y un volumen de terraplenes que es necesario formar. Hay que tener en cuenta que no todas las

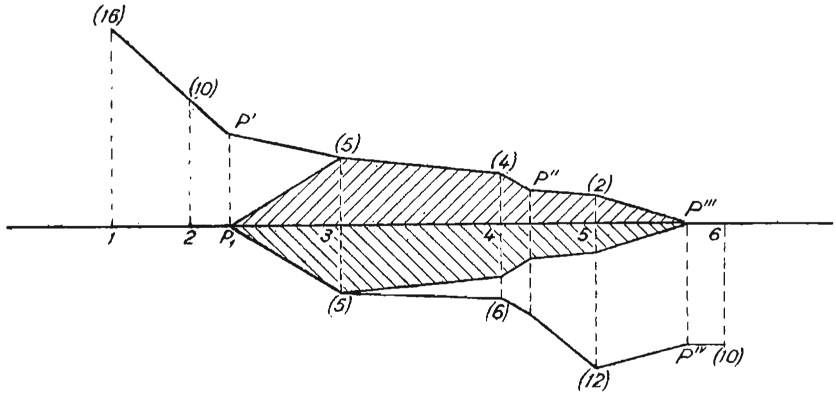

Figura 125.

tierras disponibles serán utilizables para la formación de terraplenes: algunas no cumplirán los requisitos técnicos precisos; desechadas las tierras no utilizables, tendremos un volumen disponible; su utilización o no en la deformación de los terraplenes que es preciso ejecutar, dependerá del coste de su transporte a los puntos de utilización: si el importe del transporte fuera superior al coste de la excavación y transporte de préstamos, se utilizarán éstos; en caso contrario, se procederá a la compensación longitudinal. Su estudio, obliga a conocer previamente el coste de la excavación y transporte.